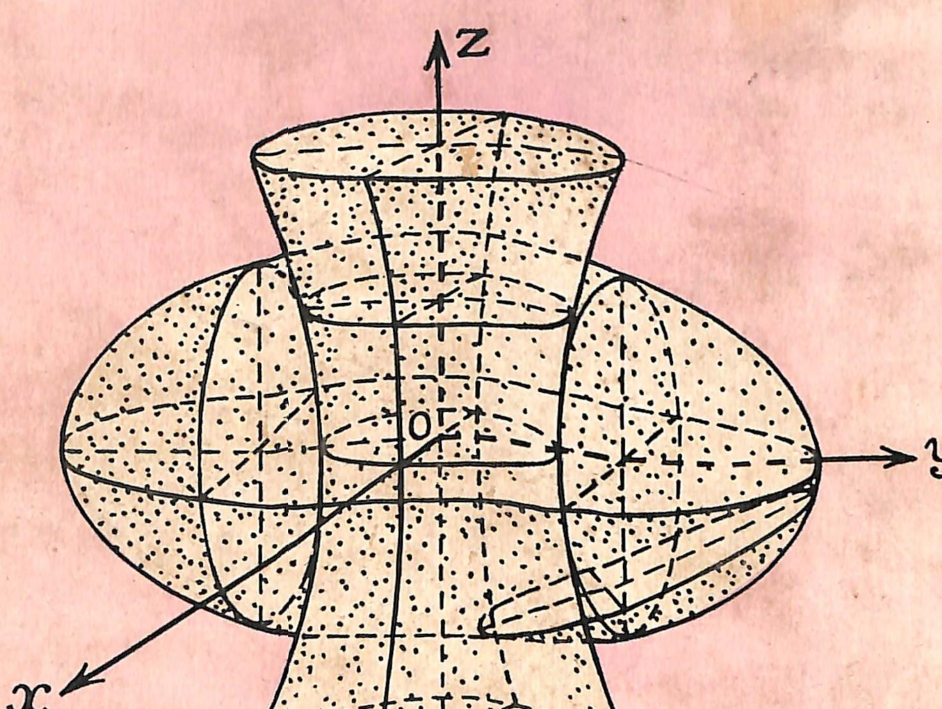
பகுமுறை வரைகணிதம்

(முப்பரிமாணம்)

(ANALYTICAL GEOMETRY_3 DIMENSIONAL)



திருமதி இலக்குமி துரைப்பாண்டியன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 676

பகுமுறை வரைகணிதம் (முப்பரிமாணம்)

[பட்டப்படிப்பிற்குரியது]

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

இலக்குமி துரைப்பாண்டியன், பி.எஸ்சி. (ஹானர்ஸ்),

கணிதப் பேராசிரியர்,

அரசினர் மகளிர் கலைக் கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — February, 1976

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 676

ANALYTICAL GEOMETRY (3 Dimensional)

LAXMI DURAIPANDIAN

Price Rs. 8-30

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-600 001.

பதிப்புரை

பகுமுறை வரைகணிதம் (முப்பரிமாணம்) என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 676 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 711 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்' கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்.

பொருளடக்கம்

பக்கம்

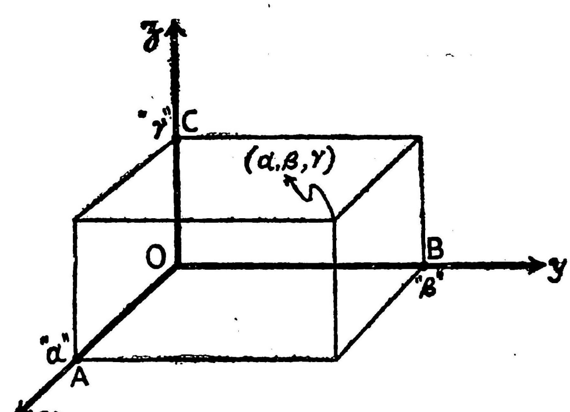
பக்கம்

1. கார்ட்டீசியன் கூறுகள்

§ 1. செவ்வகக் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் (Rectangular Cartesian Coordinates)

ஒரு தளத்தில் (plane) அமைந்துள்ள புள்ளியை வரிசைப் படுத்தப்பட்ட இரண்டு எண்களின்மூலம் தீர்மானிப்பதை இரு பரிமாணப் பகுமுறை வரைகணிதத்தில் (two dimensional analytical geometry) காணலாம். இதேபோல் வெளியில் (space) உள்ள புள்ளி ஒன்றை வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மூன்று எண்களால் குறிக்கலாம்.

இதற்காக $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள மூன்று நேர்கோடுகளை முறையே x அச்சு, y அச்சு, z அச்சு எனக் கொள்வோம். இங்கு Ox மேலுள்ள புள்ளிகள், எல்லா மிகை எண்களையும் குறிக்கின்றன எனவும், Ox' மேலுள்ள



படம் 1.

புள்ளிகள், எல்லாக் குறை எண்களையும் குறிக்கின்றன எனவும் கொள்வோம், இது போன்றே y அச்சு மேலுள்ள புள்ளிகளையும், z அச்சு மேலுள்ள புள்ளிகளையும் கொள்வோம் (படம் 1).

இப்பொழுது x அச்சின் மேலுள்ள A என்ற புள்ளி α ஐயும், y அச்சின் மேலுள்ள B என்ற புள்ளி β ஐயும், z அச்சின் மேலுள்ள C என்ற புள்ளி γ ஐயும் குறித்தால்,

A வழியாகச் செல்லும் yOz தளத்திற்கு இணையான தளமும்,

B வழியாகச் செல்லும் zOx தளத்திற்கு இணையான தளமும்,

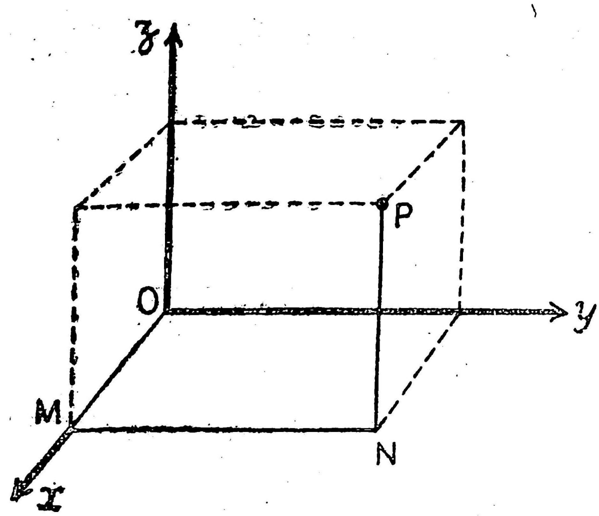
C வழியாகச் செல்லும் xOy தளத்திற்கு இணையான தளமும்

வெட்டும் புள்ளியை, α, β, γ என்ற வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண்கள் குறிக்கின்றனவாகக் கொள்ளலாம். இப் புள்ளியை

$$(\alpha, \beta, \gamma)$$

என்று எழுதலாம். இங்கு α, β, γ என்பன, புள்ளியின் கார்ட்டீசியன் கூறுகள் என்றும், அல்லது புள்ளியின் x கூறு, y கூறு, z கூறு என்றும் வழங்கப்படுகின்றன.

புள்ளி O ஆனது, ஆதி என்று வழங்கப்படுகிறது. O என்பது $(0,0,0)$ ஆகும் என்பதை எளிதில் காணலாம். yOz, zOx, xOy என்பன கூற்றுத் தளங்கள் (coordinate planes) என்று வழங்கப்படுகின்றன.



படம் 2.

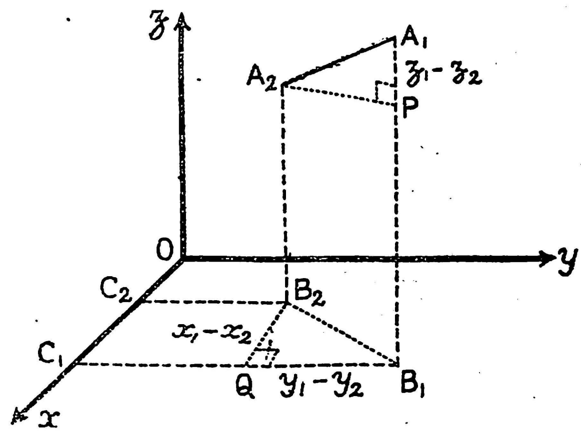
இப்பொழுது $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து xOy தளத்திற்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும், N-லிருந்து Ox-க்கு NM என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும் வரைந்தால்

$$OM = x, \ MN = y, \ NP = z$$

ஆகும் (படம் 2).

§ 2. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம்

இப்பொழுது $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்போம். படம் 3-ல்



படம் 3.

உள்ளபடி A_1B_1 ஐயும், A_2B_2 ஐயும் xOy தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும், B_1C_1 ஐயும், B_2C_2 ஐயும் Ox-க்குச் செங்குத்தாகவும் வரைவோம். மேலும், A_2P ஐ A_1B_1-க்குச் செங்குத்தாகவும், B_2Q ஐ B_1C_1-க்குச் செங்குத்தாகவும் வரைவோம். அப்படியாயின்,

$$B_2Q = x_1 - x_2,$$
$$QB_1 = y_1 - y_2,$$
$$PA_1 = z_1 - z_2.$$

மேலும், செங்கோண முக்கோணம் B_1QB_2-ல்,

$$\begin{aligned} B_1B_2^2 &= B_1Q^2 + B_2Q^2 \\ &= (y_1-y_2)^2 + (x_1-x_2)^2 \\ &= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2. \end{aligned}$$

ஆகவே, செங்கோண முக்கோணம் A_1PA_2-ல்,

$$\begin{aligned} A_1A_2^2 &= A_1P^2 + A_2P^2 \\ &= (z_1-z_2)^2 + B_1B_2^2 \\ &= (z_1-z_2)^2 + (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 \\ &= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2. \end{aligned}$$

எனவே,

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

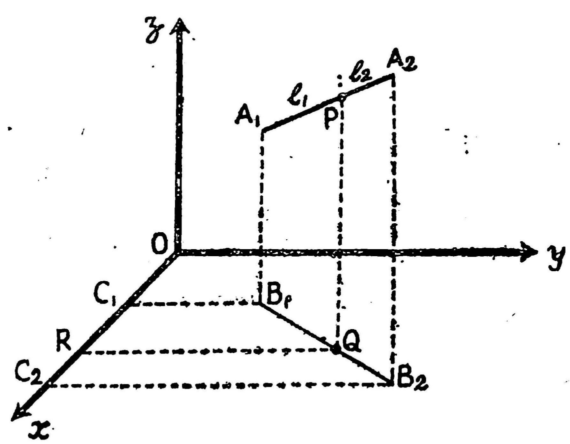
குறிப்பாக ஆதிக்கும், (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளிக்கும் இடையி லுள்ள தூரம்,

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

ஆகும்.

§3. இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டைக் கொடுக்கப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

$A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டை $l_1 : l_2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக வெட்டும் P என்ற புள்ளியின் கூறுகளைக் காண்போம். இதற்காக P ஐ (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். படம் 4-ல் உள்ளபடி



படம் 4.

A_1B_1, PQ, A_2B_2 என்ற இணைகோடுகளை xOy தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும், B_1C_1, QR, B_2C_2 என்ற இணைகோடுகளை x அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும் வரைவோம்.

அப்படியாயின்,

$$\frac{A_1P}{PA_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

ஆனால், $$\frac{A_1P}{PA_2} = \frac{B_1Q}{QB_2} = \frac{C_1R}{RC_2}.$$

ஆகவே, $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{C_1R}{RC_2}$.

இங்கு $C_1R = x_0 - x_1$,

$RC_2 = x_2 - x_0$.

எனவே, $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0}$

அதாவது $l_1 (x_2 - x_0) = l_2 (x_0 - x_1)$

அதாவது $x_0 = \dfrac{l_1 x_2 + l_2 x_2}{l_1 + l_2}$.

இதுபோலவே,

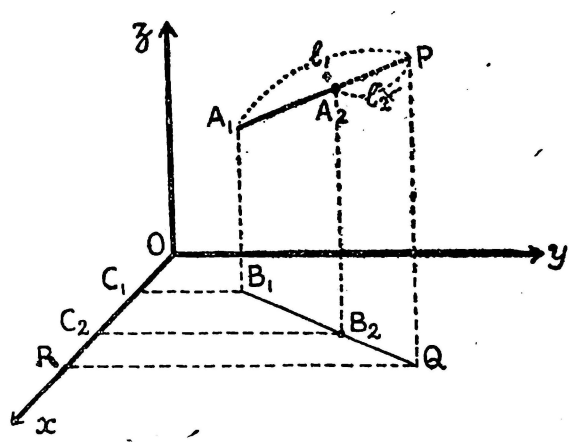
$$y_0 = \frac{l_1 y_2 + l_2 y_1}{l_1 + l_2}, \quad z_0 = \frac{l_1 z_2 + l_2 z_1}{l_1 + l_2}$$

என்று பெறலாம். ஆகவே P,

$$\left(\frac{l_1 x_2 + l_2 x_1}{l_1 + l_2}, \frac{l_1 y_2 + l_2 y_1}{l_1 + l_2}, \frac{l_1 z_2 + l_2 z_1}{l_1 + l_2}\right)$$

என்றாகிறது.

அடுத்தபடியாக $A_1 A_2$ ஐ வெளிப்புறமாக $l_1 : l_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P ஐக் காண்போம்.



படம் 5.

இதற்காக, முன் போலவே

$A_1 B_1$, PQ, $A_2 B_2$, $B_1 C_1$, QR, $B_2 C_2$

ஆகியவற்றை வரைவோம் (படம் 5).

இப்பொழுது

$$\frac{A_1P}{PA_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

ஆனால், $\dfrac{A_1P}{PA_2} = \dfrac{B_1Q}{QB_2} = \dfrac{C_1R}{RC_2}.$

ஆகவே, $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{C_1R}{C_2R}.$

இங்கு $C_1\,R = x_0 - x_1,$

$C_2\,R = x_0 - x_2.$

எனவே $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}.$

அதாவது $l_1\,(x_0 - x_2) = l_2\,(x_0 - x_1)$

அதாவது $(l_1 - l_2)\,x_0 = l_1\,x_2 - l_2\,x_1$

ஆகவே, $x_0 = \dfrac{l_1\,x_2 - l_2\,x_1}{l_1 - l_2}.$

இதுபோலவே y_0 ஐயும், z_0 ஐயும் பெற்று, P ஐ

$$\left(\frac{l_1\,x_2 - l_2\,x_1}{l_1 - l_2},\ \frac{l_1\,y_2 - l_2\,y_1}{l_1 - l_2},\ \frac{l_1\,z_2 - l_2\,z_1}{l_1 - l_2}\right)$$

அல்லது

$$\left\{\frac{l_1\,x_2 + (-l_2)\,x_1}{l_1 + (-l_2)},\ \frac{l_1y_2 + (-l_2)\,y_1}{l_1 + (-l_2)},\ \frac{l_1z_2 + (-l_2)\,z_1}{l_1 + (-l_2)}\right\}$$

என்று எழுதலாம்.

(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப் புள்ளியானது

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2},\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

என்று எளிதில் காணலாம்.

§ 4. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : $A(1, 2, 3)$, $B(4, 4, 4)$ என்ற புள்ளிகளி லிருந்து சம தூரங்களில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$P(x_0, y_0, z_0)$ என்பது, இயங்கு வரையின் மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி எனக் கொள்க. இப்பொழுது

$$PA = PB$$

அல்லது $PA^2 = PB^2$.

ஆகவே, $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 + (z_0 - 3)^2$
$= (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 4)^2 + (z_0 - 4)^2$

அதாவது $3x_0 + 2y_0 + z_0 - 17 = 0$

ஆகவே, இயங்கு வரையின் சமன்பாடு, $3x + 2y + z - 17 = 0$ என்பதாகிறது.

கணக்கு 2 : $A(3, 2, 2)$, $B(2, 0, 4)$, $C(0, -4, 8)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

$$AB^2 = (3 - 2)^2 + (2 - 0)^2 + (2 - 4)^2 = 9,$$
$$BC^2 = (2 - 0)^2 + (0 + 4)^2 + (4 - 8)^2 = 36,$$
$$AC^2 = (3 - 0)^2 + (2 + 4)^2 + (2 - 8)^2 = 81.$$

ஆகவே $AB = 3$, $BC = 6$, $AC = 9$. எனவே $AC = AB + BC$. இதிலிருந்து A, B, C என்பன, ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனத் தெரிகின்றது.

கணக்கு 3: புள்ளிகள் $A(-4, 2, 2)$ ஐயும், $B(2, 0, 4)$ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோடு, yOz தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

வெட்டும் புள்ளியை P எனக் கொள்வோம். மேலும் P ஆனது, AB ஐ $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டுகிறது என்றும் கொள்வோம்.

அப்படியாயின்

$$P \equiv \left[\frac{2\lambda - 4}{\lambda + 1}, \frac{(0)\lambda + 2}{\lambda + 1}, \frac{4\lambda + 2}{\lambda + 1} \right].$$

இப் புள்ளி yOz தளத்தில் அமைவதால், இப் புள்ளியின் x-கூறு பூச்சியத்துக்குச் சமமாகும். ஆகவே,

$$\frac{2\lambda - 4}{\lambda + 1} = 0 \text{ அல்லது } 2\lambda + 3 = 0$$

அதாவது $\lambda = 2$.

எனவே, $P \equiv \left(0, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ என்று கிட்டுகிறது.

§ 5. பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

$(3, -1, 4), (1, 1, 2), (0, 2, 1)$.

2. கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

$(2, 0, 3), (6, 4, -5), (3, 1, 1), (4, 2, -1)$.

3. புள்ளிகள் $(0, 1, 2)$ ஐயும், $(2, 1, 0)$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோடு, புள்ளிகள் $(1, 4, 7)$ ஐயும், $(-3, 0, 3)$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோட்டைப் புள்ளி $(-2, 1, 4)$-ல் வெட்டுகிறது எனக் காட்டுக.

4. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட உருவங்கள் ஒவ்வொன்றும், அதனதன் எதிரே கொடுக்கப்பட்டுள்ள உருவமாகும் எனக் காட்டுக.

(i) $(-1, 6, 9), (-2, 5, 5), (-5, 8, 5)$ இரு சமபக்க முக்கோணம்

(ii) $(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)$ சமபக்க முக்கோணம்

(iii) $(-3, 4, 7), (-4, 3, 3), (-7, 6, 3), (-6, 7, 7)$ சதுரம்

(iv) $(4, 3, 6), (2, 1, 6), (0, 3, 2), (2, 5, 2)$ செவ்வகம்

(v) $(4, 3, 6), (3, 2, 4), (0, 3, 2), (1, 4, 4)$ இணைகரம்

5. $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (centroid),

$$\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right]$$

என்பதாகும் எனக் காட்டுக.

6. புள்ளி (4, 1, 2) ஐ மையக் கோட்டுச் சந்தியாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் இரு உச்சிகள் (3,1,0), (4,0,3) என்றால், முக்கோணத்தின் மூன்றாவது உச்சியைக் காண்க.

7. $ABCD$ என்ற ஒரு நான்முகியில் (tetrahedron) எதிர்ப் பக்கங்களாகிய AB, CD ஆகியவற்றின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடும், AC, BD ஆகியவற்றின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடும், AD, BC ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : A, B, C, D என்ற புள்ளிகளை (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) எனக் கொள்க, AB-ன் மையப்புள்ளி P ஆகவும், CD-ன் மையப்புள்ளி Q ஆகவும் இருந்தால்,

$$P \equiv \left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right),$$

$$Q \equiv \left(\frac{x_3+x_4}{2},\ \frac{y_3+y_4}{2},\ \frac{z_3+z_4}{2}\right).$$

இப்பொழுது PQ-ன் மையப்புள்ளி

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\ \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$$

ஆகும்.]

8. ஒரு நான்முகியின் உச்சிகளையும், அவற்றின் எதிர் முகங்களின் (opposite faces) மையக் கோட்டுச் சந்திகளையும் இணைக்கும் நேர்கோடுகளை, உட்புறமாக 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் நான்கும் ஒன்றுடன் ஒன்று இணையும் எனக் காட்டுக. [இப் புள்ளி நான்முகியின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (centroid) எனப்படும்.]

9. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையம்,

$$\left(\frac{ax_1+by_1+cz_1}{a+b+c},\ \frac{ax_2+by_2+cz_2}{a+b+c},\ \frac{ax_3+by_3+cz_3}{a+b+c}\right)$$

எனக் காட்டுக. இங்கு $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

10. $A(4, 3, 2)$, $B(1, 6, 5)$, $C(3, 4, 3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக. மேலும் C, AB ஐ எவ்விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் காண்க.

11. $A(-1, 2, 1)$, $B(-7, -2, 3)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு, சமன்பாடு $x^2 + y^2 + z^2 - 20 = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையை வெட்டும் புள்ளிகள், AB ஐப் பிரிக்கும் விகிதங்களைக் காண்க.

12. $P(-3, 5, 3)$ ஐயும், $Q(0, 2, 6)$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோடு, கூற்றுத் தளங்களை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

13. புள்ளிகள் $A_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $A_2\ (x_2, y_2, z_2)$, $A_3\ (x_3, y_3, z_3)$ அமைக்கும் தளத்தில் உள்ள எப் புள்ளியையும்

$$\left(\frac{x_1 + m x_2 + n x_3}{1 + m + n}, \frac{y_1 + m y_2 + n y_3}{1 + m + n}, \frac{z_1 + m z_2 + n z_3}{1 + m + n}\right)$$

என்ற வடிவில் எழுத இயலும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : P என்பது தளத்தில் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியாகட்டும். மேலும் $A_1 A_2$ ஆனது, $A_3 P$ ஐ Q-ல் வெட்டட்டும். Q, $A_1 A_2$ ஐ $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்திலும், P, QA_3 ஐ $\mu : 1$ என்ற விகிதத்திலும் வெட்டட்டும். P-ன் கூறுகளைக் காண்க.]

14. $A(0, 1, 2)$ ஐயும், $B(-2, 2, 3)$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோடு $C(5, 6, 4)$ ஐயும், $D(3, 2, 2)$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோட்டை வெட்டுகிறதெனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : AB, CD ஐ வெட்டுகிறது என்றும், வெட்டும் புள்ளியானது AB ஐ $\lambda_1 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது என்றும், CD-ஐ $\lambda_2 : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது என்றும் கொண்டால்,

$$\left(\frac{-2\lambda_1 + 0}{\lambda_1 + 1}, \frac{2\lambda_1 + 1}{\lambda_1 + 1}, \frac{3\lambda_1 + 2}{\lambda_1 + 1}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{3\lambda_2 + 5}{\lambda_2 + 1}, \frac{2\lambda_2 + 6}{\lambda_2 + 1}, \frac{2\lambda_2 + 4}{\lambda_2 + 1}\right)\Bigg].$$

15. புள்ளி (2, 3, 6)-லிருந்தும், புள்ளி (−4, 3, 5)-லிருந்தும் சம தூரங்களில் இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. $A \equiv (-1, 2, 1)$, $B \equiv (1, 3, 4)$. ஒரு தளம், AB-ன் மையப் புள்ளி வழியாகச் செல்லுகிறது. AB இத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருந்தால், தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடைகள்

6. (5, 2, 3), 10. 1 : 2, 11. 1 : 1, 1 : −3.

12. (0, 2, 6), (2, 0, 8), (−6, 8, 0),

15. $12x + 2z + 1 = 0$

16. $2x + y + 3z - 10 = 0$.

2. திசைக் கொசைன்கள்

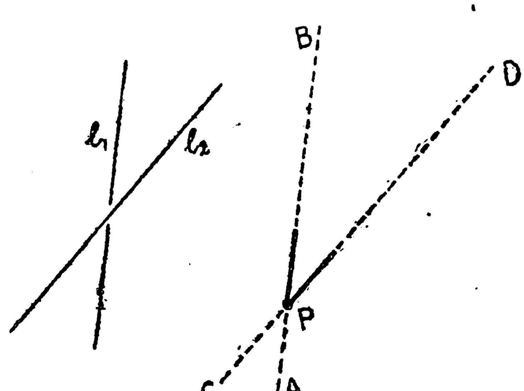
§6. வெட்டாக் கோடுகள் (Skew lines)

வெட்டும் இரண்டு கோடுகள் ஒரு தளத்தை நிர்ணயிக்கின்றன. இதேபோல் இரு இணை கோடுகளும் ஒரு தளத்தை நிர்ணயிக்கின்றன. இவ்விதமான இரு கோடுகளை ஒருதளக் கோடுகள் (coplanar lines) என்கிறோம்.

ஒருதளக் கோடுகள் அல்லாத இரு கோடுகளை, அதாவது இரு பக்கத்திலும் எத்தனை அளவு நீட்டினாலும் வெட்டாத இரு கோடுகளை வெட்டாக் கோடுகள் (skew lines) என்கிறோம்.

§7. வெட்டாக் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணங்கள்

இங்கு l_1, l_2 என்ற இரண்டு வெட்டாக் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணங்களை வரையறுப்போம் (படம் 6). இதற்காக,



படம் 6.

வெளியில் உள்ள P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு, அதன் வழியாக APB என்ற கோட்டை l_1-க்கு

இப்பொழுது இரண்டு தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களும், அத் தளங்களின் செங்கோடுகளுக்கு (normals) இடையிலுள்ள கோணங்களும் சமமாகும் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

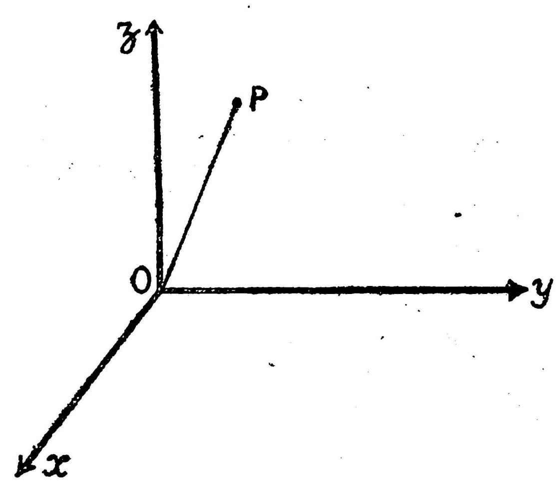
§ 9. திசைக் கொசைன்கள் (Direction Cosines)

P என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 8). இப்பொழுது OP ஆனது, x, y, z அச்சுகளுடன்

$$x\hat{O}P,\ y\hat{O}P,\ z\hat{O}P$$

என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகின்றது. இக் கோணங்களின் கொசைன்கள் (cosines of these angles),

அதாவது $\cos xOP$, $\cos yOP$, $\cos zOP$ ... (9·1)



படம் 8.

என்பன வெக்டர் $\overline{OP}$ (vector $\overline{OP}$) குறிக்கும் திசையின் திசைக் கொசைன்கள் என்று வழங்கப்படுகின்றன. இவ்வரையறையின் படி, Q என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியைப் படம் 9-ல் உள்ளவாறு நேர்கோடு OP-ன் மீது, O ஆனது P-க்கும் Q-க்கும் இடையில் அமையுமாறு எடுத்துக் கொண்டால், வெக்டர் $\overline{OQ}$ குறிக்கும் திசையின் திசைக் கொசைன்கள்,

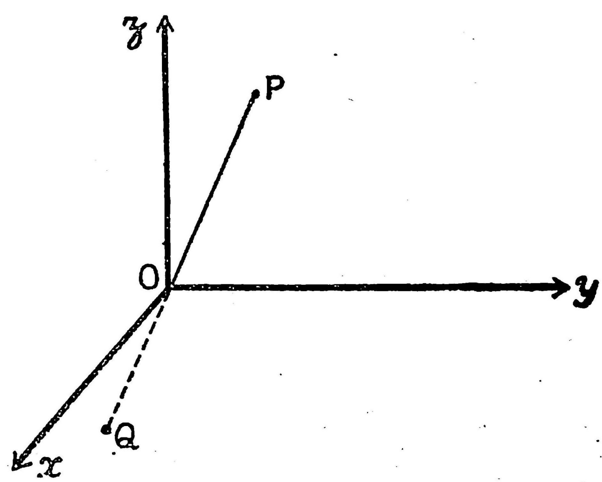
$$\cos xOQ,\ \cos yOQ,\ \cos zOQ$$

அதாவது $\cos(\pi - xOP)$, $\cos(\pi - yOP)$, $\cos(\pi - zOP)$

அதாவது $-\cos xOP$, $-\cos yOP$, $-\cos zOP$ ... (9·2)

ஆகும்.

ஆகவே, வெக்டர்கள் $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ குறிக்கும் திசைகளில் ஒன்றின் திசைக் கொசைன்கள் மற்றதின் திசைக் கொசைன் களுக்குச் சமமானவை. ஆனால், எதிர்க் குறிகளைக் கொண்டவை எனத் தெரிகிறது. எனினும், (9·1), (9·2) குறிக்கும் திசைக் கொசைன்களில் ஒரு கணத்தை (set) P, Q வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் என்போம்.



படம் 9.

x அச்சின் திசைக் கொசைன்கள் $1, 0, 0$ அல்லது $-1, 0, 0$ என்றும், y அச்சின் திசைக் கொசைன்கள் $0, 1, 0$ அல்லது $0, -1, 0$ என்றும், z அச்சின் திசைக் கொசைன்கள் $0, 0, 1$ அல்லது $0, 0, -1$ என்றும் எளிதில் காணலாம்.

இப்பொழுது, $R(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு, ஆதியையும், Rஐயும் இணைக்கும் கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்போம் (படம் 10). R-லிருந்து xOy தளத் திற்கு RN என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும், N-லிருந்து x அச்சுக்கு NA என்ற செங்குத்துக் கோட்டையும் வரைந்தால்,

$$OA = x_1$$

ஆகும். மேலும், முக்கோணம் OAR-ல், கோணம் OAR, ஒரு செங்கோணம் ஆகும்.

ஆகவே, $\cos xOR = \cos AOR = \dfrac{x_1}{OR}$.

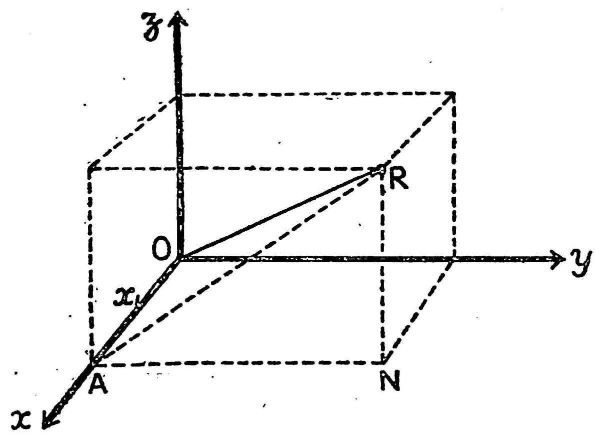
இதுபோலவே,

$$\cos yOR = \frac{y_1}{OR}, \quad \cos zOR = \frac{z_1}{OR}.$$

எனவே, கோடு OR-ன் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{x_1}{OR}, \quad \frac{y_1}{OR}, \quad \frac{z_1}{OR} \qquad \ldots \qquad (9{\cdot}3)$$

ஆகும்.



படம் 10.

அடுத்தபடியாக ஒரு கோட்டின் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை ஒன்றுக்குச் சமமாகும் எனக் காட்டுவோம். இக் கோட்டை l எனவும், இக் கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளவாறும், ஆதி வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள கோட்டை l' எனவும் குறிப்போம். l-ன் திசைக் கொசைன்களும், l'-ன் திசைக் கொசைன்களும் ஒன்றே. l'-ன்மேல் $R(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டால், இத் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{x_1}{OR}, \frac{y_1}{OR}, \frac{z_1}{OR}$$

ஆகும். இவற்றின் வர்க்கத்தின் கூட்டுத் தொகையானது

$$\left(\frac{x_1}{OR}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{OR}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{OR}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{OR^2}$$

$$= \frac{OR^2}{OR^2}$$

$$= 1.$$

§10. திசை விகிதங்கள் (Direction ratios)

ஒரு கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் மூன்றையும் வேறோர் எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் எண்களைக் கோட்டின் ஒரு கணத் திசை விகிதங்கள் அல்லது பொதுவாகக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் என்று கூறுகின்றோம்.

இப்பொழுது

$$\lambda, \mu, \nu$$

என்ற எண்களை திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்போம். திசைக் கொசைன்கள்

$$l, m, n$$

என்றால், $\lambda, \mu, \nu, l, m, n$ என்பவை

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{m}{\mu} = \frac{n}{\nu} = k$$

என்றவாறு இருக்கும்.

அதாவது,

$$l = k\lambda, \quad m = k\mu, \quad n = k\nu \qquad \ldots \quad (10{\cdot}1)$$

ஆனால் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒன்றுக்குச் சமமாகும்.

ஆகவே, $(k\lambda)^2 + (k\mu)^2 + (k\nu)^2 = 1$

அதாவது, $k^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1$

ஆகவே, $k = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}$.

எனவே, கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}, \quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} \qquad \ldots \quad (10{\cdot}2)$$

அல்லது

$$\frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}, \quad \frac{-\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}, \quad \frac{-\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} \qquad \ldots \quad (10{\cdot}3)$$

ஆகும்.

இரண்டு இணைகோடுகள் x, y, z அச்சுகளுடன் சம கோணங்களை உண்டாக்குவதால், ஒன்றின் திசைக் கொசைன்கள மற்றதின் திசைக் கொசைன்களாகும். ஆகவே, இரண்டு இணைகோடுகளின் திசை விகிதங்கள்

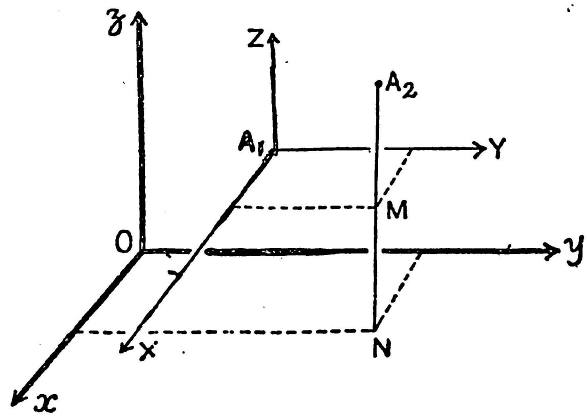
$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \ \lambda_2, \mu_2, \nu_2$$

என்றால், இத்திசை விகிதங்கள்

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \qquad \ldots \quad (10{\cdot}4)$$

என்றவாறு இருக்கும் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

கடைசியாக $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்களைக் காண்போம் (படம் 11).



படம் 11.

A_1X, A_1Y, A_1Z ஆகியவற்றை x, y, z அச்சுகளுக்கு இணையாக வரைவோம். A_2 லிருந்து z அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு, XA_1Y தளத்தை M-லும், xOy தளத்தை N-லும் வெட்டட்டும். அப்படியாயின்,

$$A_2M = A_2N - MN$$
$$= z_2 - z_1$$

அதாவது A_1X, A_1Y, A_1Z அச்சுகளைப் பொறுத்து, A_2-ன் z கூறு, $z_2 - z_1$ எனத் தெரிகிறது. இதுபோலவே இப் புது அச்சுகளைப் பொறுத்து A_2-ன் X, Y கூறுகள்

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1$$

ஆகும். ஆகவே புது அச்சுகளைப் பொறுத்து A_2

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ஆகிறது. இவ் வச்சுகளைப் பொறுத்து A_1 ஆதியாக உள்ளது. எனவே, இவ் வச்சுகளைப் பொறுத்து A_1A_2-ன் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{x_2 - x_1}{A_1A_2}, \quad \frac{y_2 - y_1}{A_1A_2}, \quad \frac{z_2 - z_1}{A_1A_2}$$

ஆகின்றன. புது அச்சுகள், பழைய அச்சுகளுக்கு இணையாக உள்ளதால் இவ்வெண்களே, A_1A_2-ன் பழைய அச்சுகளைப்

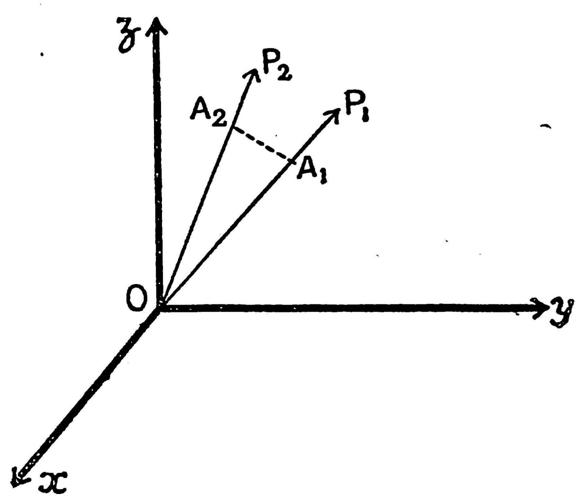
பொருந்த திசைக் கொசைன்கள் ஆகும். பழைய அச்சுகளைப் பொறுத்து

$$x_2 - x_1,\quad y_2 - y_1,\quad z_2 - z_1$$

என்பன மற்றொரு கண திசை விகிதங்கள் ஆகின்றன.

§11. இரு திசைகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம்

இங்கு வெக்டர்கள் OP_1, $\overline{OP_2}$ குறிக்கும் திசைகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்போம். படம் 12-ல் உள்ளவாறு,



படம் 12.

A_1, A_2 என்ற புள்ளிகளை OP_1, OP_2 மீது

$$OA_1 = 1,\quad OA_2 = 1$$

என்றிருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். OP_1, OP_2 ஆகியவற்றின் திசைக் கொசைன்களை

$$l_1, m_1, n_1;\quad l_2, m_2, n_2$$

என்றும், A_1 ஐயும், A_2 ஐயும்

$$(x_1, y_1, z_1),\quad (x_2, y_2, z_2)$$

என்றும் கொண்டால்,

$$l_1 = \frac{x_1}{OA_1},\quad m_1 = \frac{y_1}{OA_1},\quad n_1 = \frac{z_1}{OA_1};$$

$$l_2 = \frac{x_2}{OA_2},\quad m_2 = \frac{y_2}{OA_2},\quad n_2 = \frac{z_2}{OA_2}$$

என்று கிடைக்கிறது.

ஆனால், $OA_1 = 1, \quad OA_2 = 1.$

ஆகவே, $x_1 = l_1, \quad y_1 = m_1, \quad z_1 = n_1;$

$x_2 = l_2, \quad y_2 = m_2, \quad z_2 = n_2.$

எனவே A_1-ம், A_2-ம்

$$(l_1, m_1, n_1), \quad (l_2, m_2, n_2)$$

என்றாகின்றன. ஆனால் முக்கோணம் A_1OA_2-லிருந்து

$$A_1A_2^2 = OA_1^2 + OA_2^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cos A_1OA_2$$

என்று கிடைக்கிறது என்பது தெரியும். ஆகவே, இதில் கோணம் $A_1OA_2 = \theta$ என்றால்,

$$(l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2 = 1 + 1 - 2\cos\theta$$

என்றும். இதை மாற்றி எழுத

$$2\cos\theta = 2 - (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) - (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) + 2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$$

என்றும் கிடைக்கிறது. ஆனால்,

$$l_1, m_1, n_1; \; l_2, m_2, n_2$$

என்பவை திசைக் கொசைன்கள்.

ஆகவே, $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1; \; l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1.$

இவ் விளைவுகளைப் பயன்படுத்த

$$2\cos\theta = 2(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)$$

அல்லது, $\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ ... (11·1)

அதாவது, $\theta = \cos^{-1}(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)$ ... (11·2)

என்று முடிவில் கிடைக்கிறது.

இவ்விளைவிலிருந்து கீழ்க்காணும் விளைவுகள் கிடைக்கின்றன:

(i) OP_1, OP_2 என்ற கோடுகள், செங்குத்துக் கோடுகளானால், $\theta = 90^\circ$ ஆகும். அதாவது $\cos\theta = 0$ ஆகும்.

ஆகவே, $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ ஆகும்.

(ii) $\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ என்பன இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளின் திசை விகிதங்களானால், (10·1)-லிருந்து

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 = 0$$

ஆகும் என்பது தெளிவாகிறது.

(iii) $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 ; \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட கோடுகள் இணைகோடுகளானால், திசை விகிதங்கள்

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

என்பதற்கு இணங்க இருக்கும் என்பதை (10·4)-ல் ஏற்கெனவே கண்டோம்.

(iv) (10·2) லிருந்து, $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 : \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணம் θ ஐ

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2}\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2}}$$

என்று பெறுகிறோம்.

§12. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : $\overline{OP}$ என்ற வெக்டர் கோணங்கள் xOP, yOP, zOP என்பன, ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்குமாறு உள்ளது. OP-ன் திசைக் கொசைன்களையும், OP, அச்சுகளுடன் உண்டாக்கும் சம கோணங்களையும் காண்க.

சம கோணங்களை α எனக் கொண்டால், OP-ன் திசைக் கொசைன்கள்

$$\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$$

ஆகும். இவற்றின் வர்க்கத்தின் கூட்டுத் தொகை ஒன்றுக்குச் சமம். ஆகையால்,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

அதாவது, $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

ஆகவே, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

எனவே OP-ன் திசைக் கொசைன்கள்,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$

அல்லது $-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$ என்றும்,

சமகோணம்

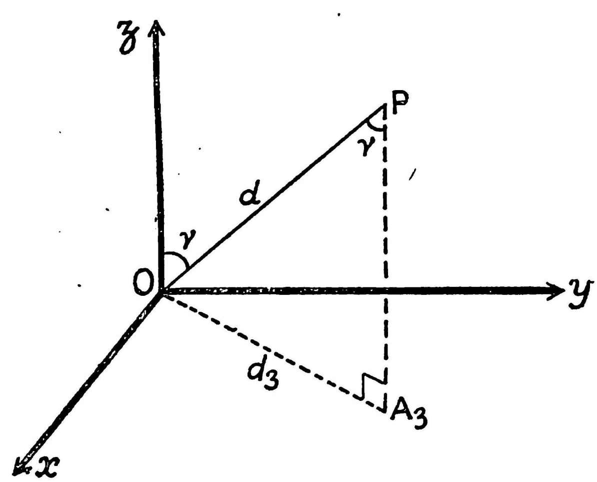
$$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ அல்லது } \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

கணக்கு 2 : P என்பது ஏதாவதொரு புள்ளி. OP-ன் நீளம் d ஆகவும், OP-ன் yOz, zOx, xOy தளங்களின் மேலுள்ள வீழல்களின் (projections) நீளங்கள் d_1, d_2, d_3 ஆகவும் இருந்தால்

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2d^2$$

எனக் காட்டுக (படம் 13).



படம் 13.

$\angle xOP = \alpha$, $\angle yOP = \beta$, $\angle zOP = \gamma$ எனக் கொண்டால்,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ஆகும். மேலும் P-லிருந்து xOy தளத்துக்கு PA_3 என்ற செங்கோட்டை வரைந்தால், முக்கோணம், OA_3P ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும். இம் முக்கோணத்தில்

$$OA_3 = d_3, \quad \angle OPA_3 = \gamma.$$

எனவே,

$$d_3 = OP\sin\gamma = d\sin\gamma.$$

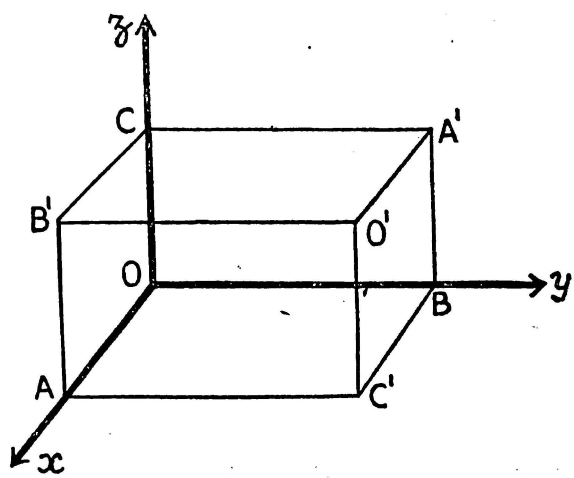
இது போலவே,

$$d_1 = d\sin\alpha, \quad d_2 = d\sin\beta.$$

ஆகவே,

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2 = d^2 \sin^2 \alpha + d^2 \sin^2 \beta + d^2 \sin^2 \gamma$$
$$= d^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)$$
$$= d^2 (1 - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \beta + 1 - \cos^2 \gamma)$$
$$= d^2 [3 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)]$$
$$= d^2 [3 - 1] = 2d^2.$$

கணக்கு 3 : ஒரு செவ்வக இணைகரத் திண்மத்தின் (rectangular parallelepiped) பக்கங்களின் நீளங்கள் a, b, c இத் திண்மத்தின் மூலைவிட்டங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களைக் காண்க.



படம் 14.

படம் 14-ல் உள்ளபடி, முனை O வழியாகச் செல்லும் பக்கங்களை OA, OB, OC எனவும், எதிர் முனை O வழியாகச் செல்லும் பக்கங்களை $O'A', O'B', O'C'$ எனவும் பெயரிடுவோம்.

இங்கு OO', AA', BB', CC'

என்பன இணைகரத் திண்மத்தின் மூலைவிட்டங்களாகும்.

மேலும்,

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c$$

என்றும், OA, OB, OC முதலியவற்றை x, y, z அச்சுகளாகவும் கொண்டால்,

$$O \equiv (0, 0, 0), \quad A \equiv (a, 0, 0) \quad B \equiv (0, b, 0), \quad C \equiv (0, 0, c)$$

$$O' \equiv (a, b, c), \quad A' \equiv (0, b, c) \quad B' \equiv (a, 0, c), \quad C' \equiv (a, b, 0)$$

ஆகும். ஆகவே OO', AA', BB', CC' ஆகிய மூலை விட்டங்களின் திசை விகிதங்கள் கீழ்க்காணுமாறு இருக்கும்:

OO' :	a	b	c
AA' :	a	$-b$	$-c$
BB' :	$-a$	b	$-c$
CC' :	$-a$	$-b$	c

இப்பொழுது வசதிக்காக OO'-க்கும் AA'-க்கும் இடையிலுள்ள குறுங் கோணத்தை (OO', AA) என்ற குறியீட்டால் குறிப்போம்.

அப்படியாயின்,

$$\cos (OO', AA') = \frac{|(a)(a) + (b)(-b) + (c)(-c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|a^2 - b^2 - c^2|}{a^2 + b^2 + c^2} = \cos (BB', CC')$$

$$\cos (OO', BB') = \frac{|-a^2 + b^2 - c^2|}{a^2 + b^2 + c^2} = \cos (AA', CC')$$

$$\cos (OO', CC)' = \frac{|-a^2 - b^2 + c^2|}{a^2 + b^2 + c^2} = \cos (AA', BB').$$

இவற்றிலிருந்து வேண்டிய கோணங்களைப் பெறலாம்.

கணக்கு 4. ஒரு கோடு, ஒரு கன சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களுடன் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்கினால்,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$$

என நிறுவுக.

முந்திய கணக்கில் $a = b = c$ எனக் கொண்டால்

$$1, 1, 1; \quad -1, 1, 1; \quad 1, -1, 1; \quad 1, 1, -1$$

என்பன மூலை விட்டங்களின் திசை விகிதங்களாகும். இம் மூலை விட்டங்களுடன், ஒரு கோடு $\alpha, \beta, \gamma\ \delta$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகின்றது என்றும், இக் கோட்டின் திசைக்

கொசைன்கள் l, m, n என்றும் கொண்டால்,

$$\cos \alpha = \frac{(1)\,l + (1)\,m + (1)\,n}{\sqrt{1+1+1}\;\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$= \frac{l+m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \beta = \frac{-l+m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \gamma = \frac{l-m+n}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \delta = \frac{l+m-n}{\sqrt{3}}$$

என்று கிடைக்கின்றது. இவற்றிலிருந்து கிடைப்பதாவது.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta$$

$$= \frac{1}{3}\Big[(l+m+n)^2 + (-l+m+n)^2 + (l-m+n)^2 + (l+m-n)^2\Big]$$

$$= \frac{1}{3}\Big[l^2+m^2+n^2+2\,lm+2\,mn+2\,nl + l^2+m^2+n^2-2\,lm+2\,mn-2\,nl + l^2+m^2+n^2-2\,lm-2\,mn+2\,nl + l^2+m^2+n^2+2\,lm-2\,mn-2\,nl\Big]$$

$$= \frac{4}{3}(l^2+m^2+n^2)$$

$$= \frac{4}{3}.$$

கணக்கு 5 : 5, −2, −1 : 4, −4, 1 ஆகியவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட இரண்டு கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

வேண்டிய திசைக் கொசைன்களை l, m, n எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$(5)\,l + (-2)\,m + (-1)\,n = 0,$$

$$(4)\,l + (-4)\,m + (1)\,n = 0.$$

ஆகவே,

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-m}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}}.$$

அதாவது, $\frac{l}{-6} = \frac{-m}{9} = \frac{n}{-12}$

அதாவது, $\frac{l}{2} = \frac{m}{3} = \frac{n}{4}$

இதிலிருந்து 2, 3, 4 என்பன கோட்டின் திசை விகிதங்கள் என்றும், கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

அல்லது, $\frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}}$

என்றும் தெரிகிறது.

§ 12. கணக்கு 6 :

l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l_3, m_3, n_3 என்பன, குறிப்பீட்டச்சுகள் $(Oxyz)$ ஐப் பொறுத்து OP, OQ, OR என்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள்.

ஆனால்,

(i) $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

(ii) $m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 = n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 = l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 = 0$

எனக் காட்டுக.

இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாவது :

$\cos xOP = l_1$, $\cos yOP = m_1$, $\cos zOP = n_1$
$\cos xOQ = l_2$, $\cos yOQ = m_2$, $\cos zOQ = n_2$
$\cos xOR = l_3$, $\cos yOR = m_3$, $\cos zOR = n_3$.

எனவே, குறிப்பீட்டச்சுகள் $(OPQR)$ ஐப் பொறுத்து Ox, Oy, Oz ஆகியவற்றின் திசைக் கொசைன்கள் பின்வருமாறு இருக்கும் :

$$Ox : \cos POx, \quad \cos QOx, \quad \cos ROx$$
$$Oy : \cos POy, \quad \cos QOy, \quad \cos ROy$$
$$Oz : \cos POz, \quad \cos QOz, \quad \cos ROz.$$

அதாவது,

$$Ox : l_1, \ l_2, \ l_3$$
$$Oy : m_1, \ m_2, \ m_3$$
$$Oz : n_1, \ n_2, \ n_3$$

எனவே,

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$
$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

மேலும் Oy, Oz-க்குச் செங்குத்தானது.

ஆகவே, $$m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 = 0$$

இதுபோலவே, $$n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 = 0$$
$$l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 = 0.$$

§ 13. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) P என்பது ஏதாவதொரு புள்ளி. $\angle xOP = 60°$, $\angle yOP = 45$ என்றால் $\angle zOP$ ஐக் காண்க.

(2) ஒரு நேர் கோடு, x, y, z அச்சுகளுடன் α, β, γ என்ற கோணங்களை உண்டாக்கினால்,

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

எனக் காட்டுக.

(3) ஒரு கோட்டின் திசை விகிதங்கள் 2, 3, 6 என்றால், கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(4) ஒரு கோட்டின் திசை விகிதங்கள் 2, 3, -6 என்றால், கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(5) வெக்டர்கள் $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ குறிக்கும் திசைகளின் திசைக் கொசைன்கள் l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2 என்றால், கோணம் P_1OP_2-ன் உட் சமவெட்டியின் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{l_1 + l_2}{2c}, \ \frac{m_1 + m_2}{2c}, \ \frac{n_1 + n_2}{2}$$

என்றும், வெளிச் சமவெட்டியின் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{l_1 - l_1}{2s}, \frac{m_1 - m_2}{2s}, \frac{n_1 - n_2}{2s}$$

என்றும் நிறுவுக.

இங்கு $c = \frac{1}{2} \cos P_1OP_2$, $s = \frac{1}{2} \sin P_1OP_2$.

[உதவிக் குறிப்பு : § 11-ல் உள்ளபடி A_1 ஐயும், A_2 ஐயும் எடுத்துக் கொள்க. A_1A_2-ன் மையப் புள்ளி M என்றால், OM-ன் திசைக் கொசைன்கள்,

$$\frac{l_1 + l_2}{2OM}, \frac{m_1 + m_2}{2OM}, \frac{n_1 + n_2}{2OM}.$$]

(6) திசைக் கொசைன்கள் அல்லது திசை விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி § 5-ல் கணக்கு 1 ஐயும், 2 ஐயும் செய்க.

(7) A_1 (a_1, b_1, c_1), A_2 (a_2, b_2, c_2) என்பன இரண்டு புள்ளிகள். $A_1 A_2$ ஆனது, ஆதி O வழியாகச் சென்றால்,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \pm OA_1 \cdot OA_2$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : கோணம் $A_1 OA_2 = 0$ அல்லது π

$$\cos A_1 OA_2 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$]

(8) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ஆகிய எண்களும் $\frac{-1}{2}$, 0, $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ஆகிய எண்களும் திசைக் கொசைன்கள் ஆகுமா என ஆய்க.

(9) முந்திய கணக்கிலுள்ள திசைக் கொசைன்கள் குறிக்கும் திசைகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(10) இரண்டு கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் 5, 3, 8 ; 2, −3, 6. இக் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

(11) புள்ளிகள் (10, 7, 5), (5, 4, −3) வழியாகச் செல்லும் கோட்டிற்கும், புள்ளிகள் (2, 5, 1), (4, 2, 7) வழியாகச் செல்லும் கோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள கோணங்களைக் காண்க.

(12) (3, −3, 3), (2, 0, 1) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கும், (5, 3, −2), (1, 1, 4) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள கோணங்களைக் காண்க.

(13) ஒரு கன சதுரத்தின் (cube) இரு மூலை விட்டங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் $\cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

(14) புள்ளிகள் (4, 5, 4) ஐயும், (3, 1, 2) ஐயும் இணைக்கும் கோடும், புள்ளிகள் (6, 5, −8) ஐயும், (4, 2, −1) ஐயும் இணைக்கும் கோடும் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

(15) இரு கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் 2, 3, 4; 3, 4, 5. இவ்விரு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு கோட்டின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க

[உதவிக் குறிப்பு : l, m, n என்பன வேண்டிய திசைக் கொசைன்கள் என்றால்,

$$2l + 3m + 4n = 0, \quad 3l + 4m + 5n = 0.]$$

(16) ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் மூன்று கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்,

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2; \quad \lambda_3, \mu_3, \nu_3$$

என்பன. இக் கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகளானால்,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : கோடுகள் அமைந்துள்ள தளத்தினது செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் λ, μ, ν என்றால்

$$\lambda_1\lambda + \mu_1\mu + \nu_1\nu = 0, \quad \lambda_2\lambda + \mu_2\mu + \nu_2\nu = 0,$$

$$\lambda_3\lambda + \mu_3\mu + \nu_3\nu = 0.]$$

(17) முந்திய கணக்கின் விளைவைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க் காணும் A, B, C, D என்ற புள்ளிகள் ஒரு தளப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(i) $A(1, 0, 2)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(5, 4, -1)$ $D(-1, 3, 1)$

(ii) $A(3, -2, 4)$, $B(-4, 3, 1)$, $C(2, -6, 2)$, $D(2, -3, 3)$.

(18) ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் மூன்று கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்.

$$\lambda, \mu, \nu; \quad a\lambda, b\mu, c\nu; \quad l, m, n.$$

கோடுகள் ஒரு தளத்தில் அமைந்தால்

$$\frac{l(b-c)}{\lambda} + \frac{m(c-a)}{\mu} + \frac{n(a-b)}{\nu} = 0$$

எனக் காட்டுக.

(19) ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் மூன்று கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்,

$$\lambda, \mu, \nu; \quad a\lambda, b\mu, c\nu; \quad \frac{\lambda}{a}, \frac{\mu}{b}, \frac{\nu}{c}$$

a, b, c ஆகியவற்றில் ஏதாவது இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று சமமானல், கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக.

(20) $(2, 3, 4)$, $(3, 3, 4)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 5)$ என்பன ஒரு நான்முகியின் உச்சிகள். இந் நான்முகியின் எதிர்ப் பக்கங்கள் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

(21) ஒரு நான்முகியில் ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களின் நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, மற்றொரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களின் நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானல், மூன்றாவது சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

விடைகள்

(1) $60°, 120°$. (3) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}; \frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}$

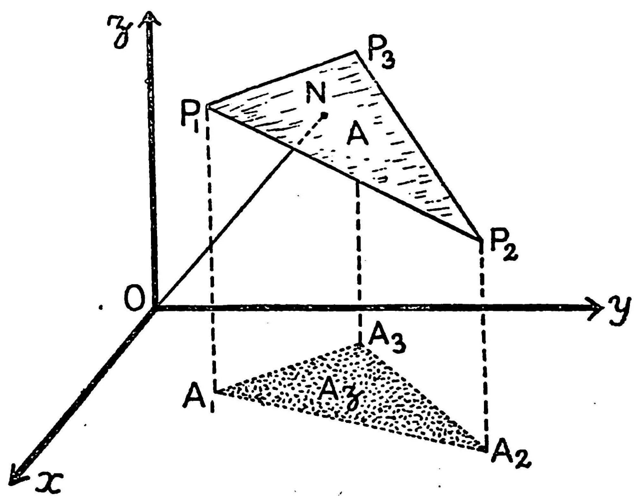
(4) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}; \frac{-2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{6}{7}$. (9) $135°$.

(10) $45°$. (11) $45°, 135°$. (12) $60°, 120°$.

(15) $\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}$ அல்லது $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$.

§ 14. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு

இங்கு, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண முயல்வோம் (படம் 15). இதற்காக $P_1 A_1$, $P_2 A_2$,



படம் 15.

$P_3 A_3$ என்ற கோடுகளை, xOy தளத்துக்குச் செங்குத்தாக, இத்தளத்தை A_1, A_2, A_3 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுமாறு வரைக. மேலும், ON ஐ தளம் $P_1 P_2 P_3$-க்குச் செங்குத்தாக வரைக. இப்பொழுது முக்கோணம் $A_1 A_2 A_3$ ஆனது முக்கோணம் $P_1 P_2 P_3$-ன் குத்து விழலாகும் (orthogonal projection). இப்பொழுது முக்கோணம் $A_1 A_2 A_3$-ன் பரப்பும், முக்கோணம் $P_1 P_2 P_3$-ன் பரப்பும் முறையே A_z, A என்றால்,

$A_z = A \times$ ($A_1 A_2 A_3$, $P_1 P_2 P_3$ என்ற தளங்களுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தின் கொசைன்)

$= A \times$ ($A_1 A_2 A_3$, $P_1 P_2 P_3$ என்ற தளங்களின் செங்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணத்தின் கொசைன்)

$= A \times \cos zON$.

அதாவது, ON-ன் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n என்றால்,

$$A_z = An.$$

இதேபோல், A_x, A_y என்பன, முக்கோணம் $P_1 P_2 P_3$-ன் மற்ற இரு குத்து வீழல்களின் பரப்புகள் ஆனல்,

$$A_x = Al, \ A_y = Am.$$

எனவே, $A^2 l^2 + A^2 m^2 + A^2 n^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

அதாவது, $A^2 (l^2 + m^2 + n^2) = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$.

ஆகவே $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$.

அல்லது $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

இப்பொழுது A_1, A_2, A_3 என்பன $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$, $(x_3, y_3, 0)$ என்பனவாகும் என்பதை எளிதில் காணலாம். இங்கு x, y அச்சுகளை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டு இரு பரிமாண முறையைப் பயன்படுத்தினல்,

$$A_1 \equiv (x_1, y_1), \ A_2 \equiv (x_2, y_2), \ A_3 \equiv (x_3, y_3)$$

என்றும்,

$$A_z^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

என்றும் கிடைக்கும் என்பதைத் அறிவோம்.

இதுபோலவே,

$$A_x^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z^3 & 1 \end{vmatrix}^2, \quad A_y^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

ஆகவே, $A = \frac{1}{2} \times$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2_{yz} + \Delta^2_{zx} + \Delta^2_{xy}} \qquad \ldots (14 \cdot 1)$$

இங்கு

$$\Delta yz = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta zx = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta xy = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

§15. மாதிரிக்கணக்கு

கணக்கு 1: ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள். $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ என்றால், முக்கோணத்தின் பரப்பு என்ன?

முக்கோணத்தின் முனைகளாவன

$$(a, 0, 0), \quad (0, b, 0), \quad (0, 0, c).$$

எனவே, முக்கோணத்தின் பரப்பு A என்றால்,

$$A = \frac{1}{2}\left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

§ 16. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள், $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) என்றால், முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(2) $(-3, 4, 7)$, $(-4, 3, 3)$, $(-7, 6, 3)$ என்ற புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(3) ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பு, மாறிலி k ஆக இருக்குமாறு, புள்ளி A, x அச்சின்மீதும், புள்ளி B, y அச்சின் மீதும், புள்ளி C, z அச்சின்மீதும் நகர்ந்தால், முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : ABC ஆகியவற்றை $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ எனவும், மையக் கோட்டுச் சந்தியை (x_0, y_0, z_0) எனவும் கொண்டால்,

$$x_0 = \frac{a+0+0}{3}, \quad y_0 = \frac{0+b+0}{3}, \quad z_0 = \frac{0+0+c}{3}.$$

மேலும்,

$$\frac{1}{4}(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = k^2.$$]

(4) ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பு, மாறிலி k ஆக இருக்குமாறு, புள்ளி A, x அச்சின்மீதும், புள்ளி B, y அச்சின் மீதும், புள்ளி C, z அச்சின்மீதும் நகர்கின்றன. A, B, C ஆகியவற்றின் வழியாக முறையே yOz, zOx, xOy தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்படும் தளங்களின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_1-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2+z_2x_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

(2) 9. (3) $81(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 4k^2$

(4) $(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 4k^2$.

3. தளம்

§17. ஒருபடிச் சமன்பாடு

x, y, z ஆகியவற்றில் ஒரு படியுடைய ஒரு சமன்பாடு, ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது என்பதை இப்பொழுது காட்டுவோம். அதற்காக

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (17 \cdot 1)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச் சமன்பாடு குறிக்கும் இயங்கு வரையின் மேல்

$$A_1 (x_1, y_1, z_1), \quad A_2 (x_2, y_2, z_2)$$

என்ற ஏதாவது இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இப் புள்ளிகளின் கூறுகள், சமன்பாடு $(17 \cdot 1)$ ஐத் திருப்தி செய்யும்.

ஆகவே,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1 = 0, \; ax_2 + by_2 + cz_2 + d_2 = 0.$$

மேலும், நேர் கோடு $A_1 A_2$ மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி P ஐ எடுத்துக் கொண்டு, P ஆனது, $A_1 A_2$ ஐ $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் கொண்டால், P-ன் கூறுகள்

$$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \; \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \; \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1} \right)$$

ஆகும். இப்பொழுது P ஆனது, சமன்பாடு $(17 \cdot 1)$ குறிக்கும் இயங்கு வரையின்மீது அமைகின்றது என்பதைக் காணலாம்.

ஏனெனில்,

$$ax + by + cz + d\text{-ல்},$$

P-ன் கூறுகளைப் பிரதியிட்டால்,

$$a\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}\right) + b\left(\frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}\right) + c\left(\frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right) + d$$

$$= \frac{1}{\lambda + 1}\{\lambda(a x_2 + by_2 + cz_2 + d) + (a x_1 + by_1 + cz_1 + d\}$$

$$= \frac{1}{\lambda + 1}\{\lambda(0) + (0)\}$$

$$= 0.$$

அதாவது, கோடு $A_1 A_2$-ன் மேலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் இயங்கு வரை (17·1)-ன் மேல் அமைகின்றன. இதிலிருந்து $A_1 A_2$ என்ற நேர்கோடு, இயங்குவரை (17·1) ன் மேல் அமைகின்றது என்ருகிறது. இதுபோல் வேறு எந்த இரண்டு புள்ளிகளை இயங்குவரை (17·1)-ன் மேல் எடுத்துக் கொண்டாலும், இப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு, இயங்கு வரை (17·1)-ன் மேலேயே அமைகின்றது என்ருகிறது. ஆகவே, சமன்பாடு (17·1) குறிக்கும் இயங்குவரை ஒரு தளம் என்பது தெளிவாகிறது.

சமன்பாடு (17·1)-ல் a, b, c, d என்ற நான்கு மாறிலிகள் உள்ளன. ஆனல், இச் சமன்பாட்டை, இம் மாறிலிகளில் ஏதாவது ஒன்ருல் வகுத்தால் முடிவில் மூன்று மாறிலிகளைக் கொண்ட சமன்பாடு கிட்டும். ஆகவே, பொதுவில் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டில் மூன்று சார்பற்ற மாறிலிகள் இருக்கும் என்பதாகிறது.

அடுத்தபடியாக, சமன்பாடு

$$ax + by + cz + d = 0$$

குறிக்கும் தளத்தின் மேல் (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

அதாவது $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$.

இதைப் பயன்படுத்தித் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$$

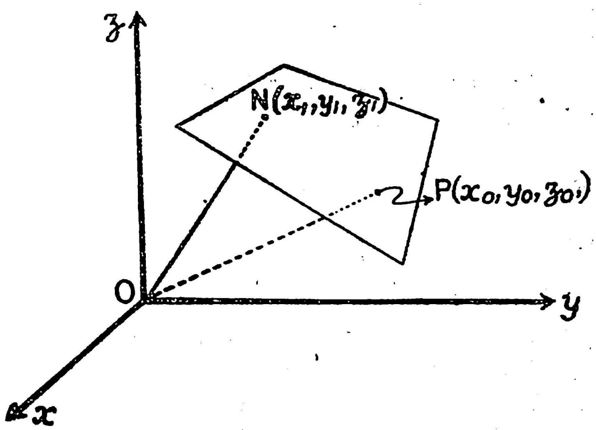
அல்லது

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad \ldots \quad (17\cdot2)$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். இவ் வடிவம் மிகவும் பயன் உடையது என்பதைப் பின்னர்க் காணலாம்.

§18. ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு

ஆதி O-விலிருந்து ஒரு தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி N ஆக இருக்கட்டும் (படம் 16). ON-ன் திசைக் கொசைன்களை l, m, n என்றும், ON-ன் நீளத்தை P என்றும் கொண்டு, இப்பொழுது தளத்தின் சமன்பாட்டைக்



படம் 16.

காண்போம். N ஐ (x_1, y_1, z_1) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்

$$l = \frac{x_1}{ON} = \frac{x_1}{p}.$$

ஆகவே $\quad x_1 = lp.$

எனவே, இது போலவே $y_1 = mp$, $z_1 = np$. N ஆனது (lp, mp, np) என்றாகிறது. தளத்தின் மேல் $P\,(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால், NP-ன் திசை விகிதங்கள்

$$x_0 - lp, \quad y_0 - mp, \quad z_0 - np$$

ஆகும். ஆனால் ON ஆனது, NP-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.

ஆகவே,

$$l\,(x_0 - lp) + m\,(y_0 - mp) + n\,(z_0 - np) = 0$$

அதாவது

$$lx_0 + my_0 + nz_0 - (l^2 + m^2 + n^2)\,p = 0$$

அதாவது

$$lx_0 + my_0 + nz_0 - p = 0$$

அதாவது

$$lx_0 + my_0 + nz_0 = p.$$

இதிலிருந்து தளத்தின் சமன்பாடு,

$$lx + my + nz = p \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (18{\cdot}1)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாட்டைத் தளத்தின் செங்குத்து வடிவச் சமன்பாடு என்று கூறலாம்.

§19. சமன்பாடு $ax + by + cz + d = 0$-ல் a, b, c குறிப்பவை

சமன்பாடு

$$ax - by + cz + d = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (19{\cdot}1)$$

ஒரு ஒருபடிச் சமன்பாடாகையால், அது ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது. ஆதியிலிருந்து இத் தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி N என்றும், இச் செங்குத்துக் கோட்டின் திசைக் கோசைன்கள் l, m, n என்றும் $ON = P$ என்றும் கொண்டால், இத் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$lx + my + nz = p$$

அல்லது $$lx + my + nz - p = 0$$

என்றும் எழுதலாம். இச் சமன்பாட்டையும், சமன்பாடு $(18{\cdot}1)$ ஐயும் ஒப்பிட .

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} = \frac{d}{-p}$$

என்றும், இதிலிருந்து

$$a, b, c$$

என்பன, ON-ன் திசை விகிதங்கள் என்றும் கிடைக்கின்றது.

அதாவது, a, b, c என்பன, $\ldots \quad (19{\cdot}2)$
தளத்தின் செங்கோட்டின் (normal) திசை விகிதங்களாகின்றன.

ஒரு தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்,

$$\lambda, \mu, \nu$$

என்பன.

மேலும், இத் தளம் (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லுகின்றது. இத் தளத்தின் சமன்பாட்டை இப்பொழுது காண்போம். இச் சமன்பாடு,

$$\lambda x + \mu y + \nu z + d = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். ஆனால் (x_1, y_1, z_1) என்பது இத் தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி. ஆகவே

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 + d = 0.$$

இதிலிருந்து

$$d = -(\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1)$$

என்றும், இதனால் தளத்தின் சமன்பாடு,

$$\lambda x + \mu y + \nu z - (\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1) = 0$$

அதாவது

$$\lambda (x-x_1) + \mu (y-y_1) + \nu (z-z_1) = 0 \quad \ldots \quad (19\cdot3)$$

என்றாகிறது என்றும் தெளிவாகிறது.

விளைவு (19·2)-லிருந்து கீழ்க்காணும் விளைவுகளும் கிடைக்கின்றன.

(i) சமன்பாடுகள் :

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$
$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

குறிக்கும் தளங்கள் இணையானவை. ஏனென்றால், இத் தளங்களின் செங்கோடுகள் இரண்டுக்குமே

$$a, b, c,$$

என்பன திசை விகிதங்களாகும். அதாவது, செங்கோடுகள் இணையானவை.

(ii) சமன்பாடுகள் :

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

குறிக்கும் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம்

$$\cos^{-1} \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

ஆகும். ஏனென்றால், தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் அவற்றின் செங்கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணமாகும்.

(iii) மேலே (ii)-ல் கூறப்பட்ட தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானுல், அவற்றின் செங்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும். ஆகவே,

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

இத் தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானுல்,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ஆகும்.

(iv) இங்கு, சமன்பாடுகள்

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$
$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

குறிக்கும். இணைத் தளங்களுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரத்தைக் (perpendicular distance) காண்போம்.

இச் சமன்பாடுகளை

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z = -\frac{d_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z = -\frac{d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

என்று எழுதினுல், இவை (18·1) என்ற வடிவில் உள்ளன. ஆகவே, தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$\frac{|(-d_1)-(-d_2)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

அல்லது $$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \ldots \qquad (19{\cdot}4)$$

என்பதாகும்.

(v) இங்கு, தளம் $ax + by + cz + d = 0$-லிருந்து புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இருக்கும் செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்போம். புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லுமாறும், தளம்

$ax+by+cz+d=0$-க்கு இணையாக இருக்குமாறும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாடு,

$$ax+by+cz-(ax_1+by_1+cz_1)=0$$

ஆகும். வேண்டிய தூரமானது, இத் தளத்திற்கும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்திற்கும் இடையிலுள்ள தூரமாகும். ஆகவே, இத் தூரமானது

$$\frac{|-(ax_1+by_1+cz_1)-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

அல்லது,

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \dots \qquad (19\cdot5)$$

ஆகும்.

§ 20. ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு (தொடர்ச்சி)

இங்குக் கீழ்க்காணும் தளங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

(i) a, b, c என்பவற்றை x, y, z அச்சுத் துண்டுகளாகக் (x, y, z intercepts) கொண்ட தளம்.

(ii) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) வழியாகச் செல்லும் தளம்.

(iii) l-ன் வழியாகச் செல்லுமாறும், (x_2, y_2, z_2) வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம். (இங்கு l ஆனது λ, μ, ν ஆகியவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக்கொண்டு, (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லுகின்றது).

(iv) (iii)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள l-ன் வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு

$$a'x+b'y+c'z+d'=0$$

குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறும் உள்ள தளம்.

(v) l-ன் வழியாகச் செல்லுமாறும், λ', μ', ν' என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட l'-க்கு இணையாகவும் உள்ள தளம்.

(i) ஒரு தளமானது, x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் x கூறு, தளத்தின் x அச்சு வெட்டு என்றும், y அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் y கூறு, தளத்தின் y அச்சு வெட்டு என்றும், z அச்சை

வெட்டும் புள்ளியின் z கூறு, z அச்சு வெட்டு என்றும் வழங்கப் படுகின்றன. இங்கு a, b, c என்பன x, y, z அச்சு வெட்டுக ளாகையால், தளமானது

$$(a, 0, 0), \quad (0, b, 0), \quad (0, 0, c)$$

வழியாகச் செல்லுகின்றது. ஆகவே, தளத்தின் சமன் பாட்டை

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

எனக் கொண்டால்,

$$A(a) + B(0) + D = 0$$

$$A(0) + B(b) + c(0) + D = 0$$

$$A(0) + B(0) + C(c) + D = 0$$

என்றும், இவற்றிலிருந்து

$$A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. ஆகவே தளத்தின் சமன்பாடு

$$\left(-\frac{D}{a}\right)x + \left(\frac{-D}{b}\right)y + \left(\frac{-D}{c}\right)z + D = o$$

என்றுகிறது. இதை மாற்றி எழுத,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

அல்லது $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

என்று கிடைக்கின்றது.

(ii) இங்குத் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \cdots \quad (20\cdot1)$$

எனக் கொள்வோம். (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) என்பன இத் தளத்திலுள்ள புள்ளிகள் ஆகையால்,

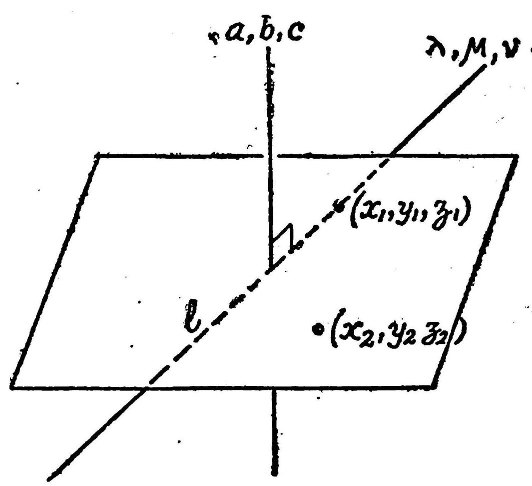
$$\left.\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (20\cdot2)$$

(20·1)-லிருந்தும், (20·2)-லிருந்தும் a, b, c, d ஐ நீக்க, தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (20\cdot3)$$

என்று கிடைக்கின்றது.

(iii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்களை a, b, c எனக் கொள்வோம் (படம் 17). (x_1, y_1, z_1) என்பது இத் தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி. ஆகவே, (17·2)-ல்



படம் 17.

உள்ளபடி தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0 \quad \ldots \quad (20\cdot4)$$

என்று எழுதலாம். தளத்தின் செங்கோடும், தளத்திலுள்ள l-ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகையால்,

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \quad \ldots \quad (20\cdot5)$$

மேலும், தளமானது (x_2, y_2, z_2) வழியாகச் செல்லுகிறது.

ஆகவே,

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0 \quad \ldots \quad (20.6)$$

(20·4), (20·5), (20·6) என்பவற்றிலிருந்து a ஐயும், b ஐயும், c ஐயும் நீக்க, தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

(iv) தளமானது l வழியாகச் செல்லுவதால், (iii)-ல் உள்ள படியே (20·4) ஐயும், (20·5) ஐயும் பெறுகிறோம். ஆனால், இங்குத் தளமானது

$$a'x+b'y+c'z+d'=0$$

குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தானது. அதாவது இவ்விரு தளங்களின் செங் கோடுகளும் செங்குத்தானவை. ஆனால் இச் செங்கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்

$$a, b, c;\quad a', b', c'$$

ஆகும். ஆகவே,

$$aa'+bb'+cc'=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (20\cdot7)$$

எனவே, (20·4), (20·5), (20·7) ஆகியவற்றிலிருந்து a, b, c முதலியவற்றை நீக்கி தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0$$

என்று பெறுகிறோம்.

(v) தளமானது l வழியாகச் செல்லுவதால், (iii)-ல் உள்ள படியே (20·4)ஐயும், (20·5) ஐயும் பெறுகிறோம், ஆனால், இங்குத் தளமானது l'-க்கு இணையாக உள்ளது. அதாவது தளத்தின் செங்கோடும், l-ம் செங்குத்தானவை. ஆனால், தளத்தின் செங் கோடு, l' ஆகியவற்றின் திசை விகிதங்கள்

$$a, b, c;\quad \lambda', \mu', \nu'$$

ஆகும்.

ஆகவே,

$$a\lambda' + b\mu' + c\nu' = 0 \qquad \ldots \qquad (20\cdot8)$$

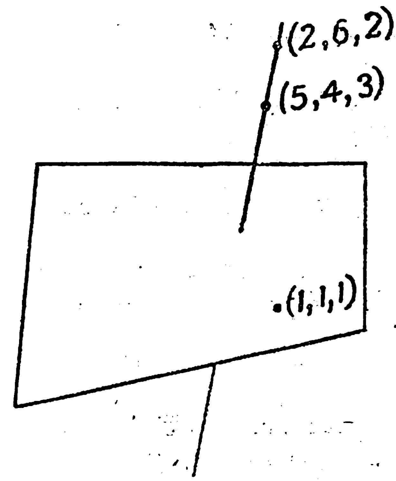
எனவே, (20·4), (20·5), (20·8) ஆகியவற்றிலிருந்து a, b, c முதலியவற்றை நீக்கி, தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix} = 0$$

என்று பெறுகிறோம்.

§21. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : புள்ளிகள், (5, 4, 3), (2, 6, 2), வழியாகச் செல்லும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும், புள்ளி (1, 1, 1) வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க (படம் 18).



படம் 18

கோட்டின் திசை விகிதங்கள்,

$$5-2, \quad 4-6, \quad 3-2.$$

அதாவது $\quad 3, \quad -2, \quad 1.$

கோடு, தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளதால், தளத்தின் சமன்பாடு,

$$3x - 2y + z + d = 0$$

என்றவாறு இருக்கும். தளம் (1, 1, 1) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$3(1) - 2(1) + 1(1) + d = 0$$

அதாவது $d = -2.$

ஆகவே தளத்தின் சமன்பாடு

$$3x - 2y + z - 2 = 0$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 2. புள்ளிகள் (2, 4, 4), (1, –1, –3), (1, 0, –1) வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

புள்ளி (2, 4, 4) வழியாகத் தளம் செல்லுவதால், தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$a(x-2) + b(y-4) + c(z-4) = 0 \quad \ldots (1)$$

என்று கொள்ளலாம். புள்ளி (1, –1, –3) இத் தளத்தின்மேல் அமைவதால்,

$$a(1-2) + b(-1-4) + c(-3-4) = 0$$

அதாவது $a + 5b + 7c = 0 \quad \ldots (2)$

புள்ளி (1, 0, –1)-ம் இத் தளத்தின்மேல் அமைந்துள்ள.

ஆகவே,

$$a(1-2) + b(0-4) + c(-1-4) = 0$$

அதாவது $a + 4b + 5c = 0 \quad \ldots (3)$

(1), (2), (3) முதலிய தொடர்புகளிலிருந்து a, b, c முதலியவற்றை நீக்க, தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்காணுமாறு மாற்றி எழுதலாம் :

$$(x-2)(25-28) - (y-4)(5-7) + (z-4)(4-5) = 0.$$

அல்லது, $-3(x-2)+2(y-4)-(z-4)=0$

அல்லது, $3x-2y+z-2=0.$

கணக்கு 3 : புள்ளிகள் (2, 2, 0), (1, 3, 5) வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு $x+2y+z+3=0$ குறிக்கும் தளத்துக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறும் உள்ள தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தளம் (2, 2, 0) வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே, அதன் சமன்பாடு,

$$a(x-2)+b(y-2)+c(z-0) \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். தளம் (1, 3, 5) வழியாகவும் செல்லுகிறது. ஆகவே

$$a(1-2)+b(3-2)+c(5)=0$$

அல்லது, $a-b-5c=0 \quad \ldots \quad (2)$

தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்,

$a, b, c.$

சமன்பாடு $x+2y+z+3=0$ குறிக்கும் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

1, 2, 1.

இவ்விரு தளங்களும் செங்குத்தானவை ஆதலால், அவற்றின் செங்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. ஆகவே,

$$a+2b+c=0, \quad (3)$$

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து a, b, c முதலியவற்றை நீக்க, வேண்டிய சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாடு

$$3x-2y+z-2=0$$

என்று சுருங்குகிறது.

கணக்கு 4. புள்ளி (2, 3, 2) வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்று, சமன்பாடுகள்

$$x+3y+3z+4=0,\quad 3x+4y-z+1=0$$

குறிக்கும் தளங்களுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தளம் (2, 3, 2) வழியாகச் செல்லுவதால், தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$a(x-2)+b(y-3)+c(z-2)=0 \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்ளலாம். இத் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$a,\ b,\ c.$$

சமன்பாடு $x+3y+3z+4=0$ குறிக்கும் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$1,\ 3,\ 3.$$

இவ்விரு செங்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகையால்,

$$a+3b+3c=0. \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இதேபோல் தளம் $3x+4y-z+1=0$-விருந்து

$$3a+4b-c=0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

என்று கிடைக்கிறது. எனவே (1), (2), (3) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து a, b, c முதலியவற்றை நீக்க, வேண்டிய சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

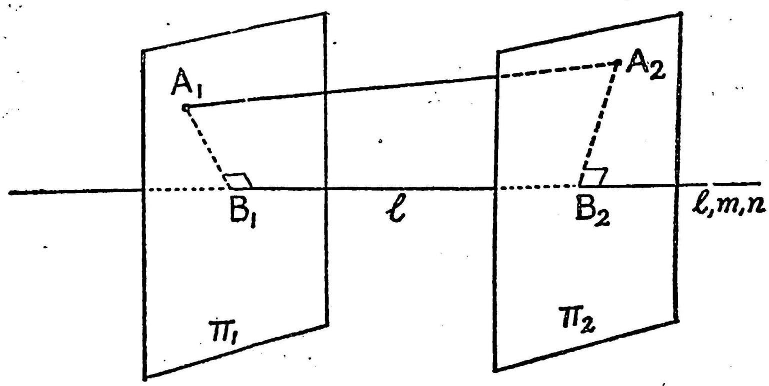
என்று கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாடு,

$$3x-2y+z-2=0$$

என்று சுருங்குகிறது.

கணக்கு 5. A_1 ஆனது (x_1, y_1, z_1) எனவும், A_2 ஆனது (x_2, y_2, z_2) எனவும், l என்ற கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n எனவும் இருந்தால், $A_1 A_2$-ன் l மேலுள்ள வீழலைக் காண்க (படம் 19).

A_1 வழியாகச் செல்லுமாறும், l-க்குச் செங்குத்தானதுமான π_1 என்ற தளத்தையும். A_2 வழியாகச் செல்லுமாறும், l-க்குச் செங்குத்தானதுமான π_2 என்ற தளத்தையும் வரைக. இத் தளங்கள் l ஐ B_1 லும், B_2-லும் வெட்டட்டும். இப்பொழுது B_1B_2 என்பது A_1A_2-ன் l மேலுள்ள வீழலாகும். இவ் வீழலின் நீளம் π_1-க்கும், π_2-க்கும் இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரமாகும்.



படம் 19.

l, m, n என்பன தளம் π_1-ன் செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள். ஆகவே. π_1-ன் சமன்பாடு

$$lx + my + nz + d = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். ஆனால் இத் தளம் (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்கிறது. ஆகவே

$$lx_1 + my_1 + nz_1 + d = 0$$

அதாவது, $d = -(lx_1 + my_1 + nz_1)$

எனவே, π_1-ன் சமன்பாடு,

$$lx + my + nz - (lx_1 + my_1 + nz_1) = 0$$

என்றுகிறது. இதேபோல, π_2-ன் சமன்பாடு

$$lx + my + nz - (lx_2 + my_2 + nz_2) = 0$$

என்றுகிறது. ஆகவே, (19·4)-லிருந்து π_1-க்கும், π_2-க்கும் இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம்

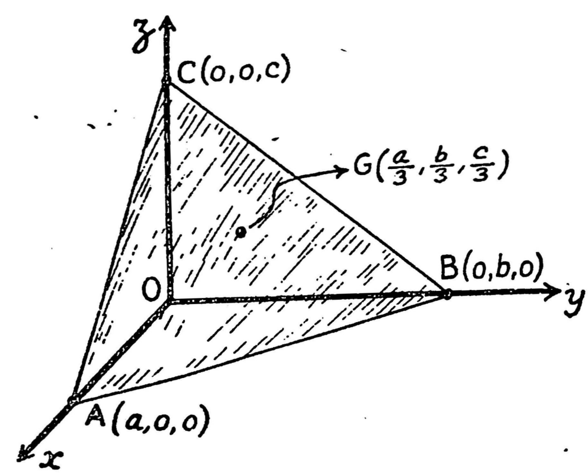
$$\frac{(lx_1 + my_1 + nz_1) - (lx_2 + my_2 + nz_2)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

அதாவது $l(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2) + n(z_1 - z_2)$ என்று கிடைக்கின்றது. ஆகவே, $A_1 A_2$-ன் l மேலுள்ள வீழலாகிய

$$B_1 B_2 = | l(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2) + n(z_1 - z_2) |$$

ஆகும்.

கணக்கு 6. ஒரு தளம், நிலைத்த புள்ளியாகிய (α, β, γ) வழியாகச் சென்று கொண்டே நகருகிறது (படம் 20). இத்தளம் x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம் 20.

A ஐயும், B ஐயும், C ஐயும் முறையே $(a, 0, 0)$ எனக் கொள்வோம். இங்கு a, b, c என்பவை மாறிகள். முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (x_0, y_0, z_0) என்றால்,

$$x_0 = \frac{a+0+0}{3}, \quad y_0 = \frac{0+b+0}{3}, \quad z_0 = \frac{0+0+c}{3}$$

அதாவது,

$$a = 3x_0, \quad b = 3y_0, \quad c = 3z_0.$$

தளம் ABC-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

தளம் (α, β, γ) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=1.$$

இதிலிருந்து a, b, c முதலியவற்றை நீக்க,

$$\frac{\alpha}{3x_0}+\frac{\beta}{3y_0}+\frac{\gamma}{3z_0}=1$$

என்றும், (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{\alpha}{3x}+\frac{\beta}{3y}+\frac{\gamma}{3z}=1$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இதை

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=3$$

என்று மாற்றி எழுதலாம்.

கணக்கு 7. ஒரு நகரும் தளம், x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. ஆதியிலிருந்து தளம் ABC-க்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் நீளம், மாறிலி k என்றால், A, B, C வழியாக கூற்றுத் தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட தளங்களின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டை

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{k^2}$$

எனக் காட்டுக.

A ஐயும், B ஐயும், C ஐயும் முறையே $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ எனக் கொள்வோம். இங்கு a, b, c என்பவை மாறிகள். A, B, C வழியாக, கூற்றுத் தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட தளங்களின் வெட்டுப் புள்ளி (x_0, y_0, z_0) என்றால்,

$$x_0=a,\ y_0=b,\ z_0=c.$$

தளம் ABC-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

தளம், ஆதியிலிருந்து உள்ள செங்குத்துத் தூரம் k ஆகையால்

$$k^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}}$$

எனவே, $\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2} = \frac{1}{k^2}$

இதிலிருந்து (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{k^2}$$

எனக் கிடைக்கின்றது.

§ 22. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) yOz, zOx, xOy தளங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ எனக் காட்டுக.

(2) புள்ளிகள் $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 3)$, $(1, -2, -3)$ வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) λ, μ, ν என்பன, (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் திசை விகிதங்கள். இக் கோடு, சமன்பாடு

$$ax + by + cz + d = 0$$

குறிக்கும் தளத்தில் அமைந்தால்,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0, \quad a\lambda + b\mu + c\nu = 0$$

எனக் காட்டுக.

(4) கீழ்க்காணும் தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(i) புள்ளிகள் $(1, 2, -3)$, $(1, -3, -1)$, $(3, -2, -1)$ வழியாகச் செல்லும் தளம்.

(ii) சமன்பாடு $x + 2y + 3z - 4 = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு இணையாக இருக்குமாறும், புள்ளி $(2, 0, -2)$ வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம்.

(iii) திசை விகிதங்கள் 1, 2, 3 கொண்ட ஒரு கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும், புள்ளி $(2, -3, 0)$ வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம்.

(iv) புள்ளிகள் (3, 5, 7), (1, 1, 1) வழியாகச் செல்லும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும், புள்ளி (4, −1, −2) வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம்.

(v) புள்ளி (2, 4, 0) வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டைச் செங்கோடாகவும், புள்ளி (1, 2, −3) ஐ இச் செங்கோட்டின் அடியாகவும் கொண்ட தளம்.

(vi) புள்ளிகள் (−1, 3, −3), (6, −2, −2) வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு $x + y - z + 1 = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள தளம்.

(vii) புள்ளி (1, −1, 1) வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடுகள் $3x - 3y + z + 2 = 0$, $2x + 5y - 4z + 3 = 0$ குறிக்கும் தளங்களுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும் உள்ள தளம்.

(viii) AB, AC என்ற கோடுகள் அமைக்கும் தளம். இங்கு $A \equiv (-3, -2, 1)$; AB ன் திசை விகிதங்கள் 5, −4, 1; AC-ன் திசை விகிதங்கள் 3−, 3−, 1.

(ix) AB என்ற கோட்டின் வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு $x - 2y + z = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள தளம். இங்கு $A \equiv (0, 1, -2)$; AB-ன் திசை விகிதங்கள் 5, −1, 1.

5. கீழ்க்காணும் தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(i) புள்ளிகள் (2, −3, 3), (−5, 2, 0), (1, −7, 1) வழியாகச் செல்லும் தளம்.

(ii) சமன்பாடு $2x + y - 3z + 1 = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு இணையாக இருக்குமாறும், புள்ளி (0, −2, 2) வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம்.

(iii) திசை விகிதங்கள் 2, 1, −3 கொண்ட ஒரு கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும், புள்ளி (−4, 3, 1) வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம்.

(iv) புள்ளிகள் (4, 2, 1), (2, 1, 4) வழியாகச் செல்லும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும், புள்ளி (0, 1, 3) வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம்.

(v) புள்ளி (5, 1, −3) வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டைச் செங்கோடாகவும், புள்ளி (1, −1, 3) ஐ இச் செங்கோட்டின் அடியாகவும் கொண்ட தளம்.

(vi) புள்ளிகள் (3, −8, 2), (−2, −1, 1) வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு $x + y + z + 1 = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள தளம்.

(vii) புள்ளி (0, −5, 1) வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடுகள் $x + 4y + 2z + 3 = 0$, $2x + 5y + 3z + 4 = 0$ குறிக்கும் தளங்களுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும் உள்ள தளம்.

(viii) AB, AC என்ற கோடுகள் அமைக்கும் தளம். இங்கு $A \equiv (-1, 0, 2)$; AB-ன் திசை விகிதங்கள் 4, 1, 3; AC-ன் திசை விகிதங்கள் 1, 7, 3.

(ix) AB என்ற கோட்டின் வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு $3y + z + 5 = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள தளம். இங்கு $A \equiv (-3, 1, 1)$; AB-ன் திசை விகிதங்கள் 1, −2, 0.

(6) $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ முதலியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையத்தைக் (orthocentre) காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: செங்கோட்டு மையம் $H(x_1, y_1, z_1)$ எனக் கொள்வோம். AH, BC-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. ஆனால், இவற்றின் திசை விகிதங்கள்

$$x_1 - a,\ y_1,\ z_1;\ \ 0, b, -c \text{ என்பன.}$$

ஆகவே, $(x_1 - a)0 + y_1 b + z_1(-c) = 0$.

அதாவது $by_1 = cz_1$. இம்மாதிரியே, முடிவில்

$ax_1 = by_1 = cz_1 = k$ எனப் பெறலாம். ஆனால், H, ABC தளத்தில் உள்ளது. எனவே,

$$x_1 = \frac{k}{a},\quad y_1 = \frac{k}{b},\quad z_1 = \frac{k}{c}$$

என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ ஐத்}$$

திருப்தி செய்கின்றன. இதிலிருந்து k-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.]

(7) $OABC$ என்ற நான்முகியில், பக்கங்களாகிய OA, OB, OC என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. முக்கோணம் ABC-ன் கோணங்கள் A, B, C. முகம் ABC ஆனது BOC, COA, AOB என்ற முகங்களுடன் α, β, γ என்ற முக்கோணங்களை உண்டாக்கினால்,

$$\cos^2\alpha = \cot B \cos C, \ \cos^2\beta = \cos C \cot A,$$
$$\cos^2\gamma = \cot A \cos B$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : O ஐ $(0, 0, 0)$ என்றும், A ஐ $(a, 0, 0)$ என்றும், B ஐ $(0, b, 0)$ என்றும், C ஐ $(0, 0, c)$ என்றும் கொண்டால், AB, AC என்ற பக்கங்களின் திசை விகிதங்கள்

$$a, -b, 0 ; \quad a, 0, -c.$$

எனவே, $\cos^2 A = \dfrac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}$

இதேபோல், $\cos^2 B$-ம், $\cos^2 C$-ம் கிடைக்கின்றன. முகம் ABC-ன் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்களும், OA-ன் திசை விகிதங்களும்

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}; \quad 1, 0, 0$$

ஆகும். ஆகவே,

$$\cos^2\alpha = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2\right\}(1^2)} . \Bigg]$$

(8) புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோடு, λ, μ, ν என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்டுள்ளது. இக் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்று, ஆதியின் வழியாகவும் சென்றால் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0$$

எனக் காட்டுக.

(9) λ, μ, ν என்பவற்றை திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட இரு இணை கோடுகளில் ஒன்று, (x_1, y_1, z_1) வழியாகவும்,

மற்றொன்று (x_2, y_2, z_2) வழியாகவும் செல்லுகின்றன. இக் கோடுகள் உண்டாக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_1-z_2 \end{vmatrix} = 0$$

எனக் காட்டுக.

(10) தனது x, y, z அச்சுத் துண்டுகளின் தலைகீழ் எண்களின் (reciprocals) கூட்டுத் தொகை மாருத வண்ணம் ஒரு தளம் நகர்கின்றது. இத் தளம் ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : அச்சுத் துண்டுகள் a, b, c என்ருல்

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k \text{ அல்லது } \frac{1}{ka}+\frac{1}{kb}+\frac{1}{kc}=1.$$

ஆனுல் தளத்தின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

அல்லது $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\left(\frac{1}{ka}+\frac{1}{kb}+\frac{1}{kc}\right)=0$$

அதாவது $$\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{b}\left(y-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{c}\left(z-\frac{1}{k}\right)=0.$$

ஆகவே, தளம் $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ வழியாகச் செல்லுகிறது.]

(11) புள்ளிகள் (2, 4, 2), (2, 2, 0), (0, 2, 2) வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (3, 3, 0), இத் தளத்தின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி எனக் காட்டுக.

(12) புள்ளிகள் (1, 2, 4), (0, 3, 3), (2, −1, 3), (3, 1, 7), என்பன ஒருதளப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(13) (2, 3, 5), (1, 4, 4) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, (3, 0, 4), (4, 2, 8) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை வெட்டுகின்றது எனக் காட்டுக.

(14) புள்ளி (1, 0, 2)லிருந்து தளம் $2x - y + 2z - 3 = 0$-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(15) புள்ளி (0, 1, −1)-லிருந்து தளம் $2x - y + 2z - 3 = 0$-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(16) சமன்பாடுகள் $12x + 3y - 4z + 26 = 0$, $12x + 3y - 4z + 13 = 0$ குறிக்கும் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

17. சமன்பாடுகள் $2x + y - 2z + 2 = 0$, $4x + 2y - 4z + 1 = 0$ குறிக்கும் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

18. சமன்பாடுகள் $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 2z - 1 = 0$ குறிக்கும் தளங்களிலிருந்து, புள்ளி $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, சம தூரங்களில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

19. P என்பது ஒரு நகரும் புள்ளி. PM என்பது P-லிருந்து தளம் $y + a = 0$-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு. S என்பது, $(0, a, 0)$. $SP = PM$ என்றால், P-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$x^2 + z^2 - 4ay = 0$$

எனக் காட்டுக.

20. A ஆனது (3, 4, 5) என்றும், B ஆனது (0, 1, 2) என்றும் இருந்தால், (4, −2, −1), (2, 0, 0) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மீதுள்ள AB-ன் வீழலைக் காண்க.

21. புள்ளிகள் (1, 2, 3), (3, 5, 9) வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் மீதுள்ள AB ன் வீழலின் நீளத்தைக் காண்க. இங்கு A என்பது (4, 5, 6); B என்பது (4, 1, 1).

22. ஒரு தளத்தின் x, y, z அச்சுத் துண்டுகள் a, b, c என்றால்,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு P என்பது ஆதியிலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமாகும்.

23. P என்னும் புள்ளி வழியாகச் செல்லுமாறும், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானதுமான மூன்று கோடுகள், ஒரு தளத்தை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. P வழியாகச் செல்லும் வேறு மூன்று

$$\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}=\frac{1}{PA'^2}+\frac{1}{PB'^2}+\frac{1}{PC'^2}$$

எனக் காட்டுக.

(24) ஒரு தளம் நிலைத்த புள்ளியாகிய (α, β, γ) வழியாகச் சென்று கொண்டே நகருகிறது. இத் தளம் x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. A, B, C வழியாக ஆற்றுத் தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்படும் தளங்கள், P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. P-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=1$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : A, B, C, P என்பன $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, (x_0, y_0, z_0) என்றால் $a = x_0$, $b = y_0$, $c = z_0$. தளம் (α, β, γ) வழியாகச் செல்லுவதால்

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=1 \text{ அல்லது } \frac{\alpha}{x_0}+\frac{\beta}{y_0}+\frac{\gamma}{z_0}=1.$$]

(25) ஒரு தளம் நிலைத்த புள்ளியாகிய (α, β, γ) வழியாகச் சென்று கொண்டே நகருகிறது. இத் தளம் x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. நான்முகி $OABC$-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் சமன்பாடு

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=4$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : A, B, C, P என்பன $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, (x_0, y_0, z_0) என்றால்,

$$x_0=\frac{0+a+0+0}{4},\quad y_0=\frac{0+0+b+0}{4},\quad z_0=\frac{0+0+0+c}{4}.$$]

(26) ஒரு நகரும் தளம், x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆதியிலிருந்து தளம் ABC க்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் நீளம், மாறிலி k என்றால், முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{9}{k^2}$$

எனக் காட்டுக.

(27) ஒரு நகரும் தளம், x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆதியிலிருந்து இத் தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் நீளம், மாறிலி k என்றால், நான்முகி $OABC$-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{16}{k^2}$$

எனக் காட்டுக.

(28) ஒரு நகரும் தளம், x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $OA^2 + OB^2 + OC^2$ மாறிலி k^2-க்குச் சமமானால், ஆதியிலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் அடியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = k^2$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: செங்கோட்டடியை $N(x_0, y_0, z_0)$ எனக் கொண்டால், தளத்தின் சமன்பாடு

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$$

ஆகும். மேலும்,

$$OA = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x}, \quad OB = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{y_0},$$

$$OC = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{z_0}.$$]

(29) ஆதியிலிருந்து ஒரு தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்கோட்டின் அடி (f, g, h). இத் தளம் x, y, z அச்சுகளை A, B, C

என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பு

$$\frac{\left[f^2+g^2+h^2\right]^{\frac{5}{2}}}{2fgh}$$

எனக் காட்டுக.

விடைகள்

2. $x+2y-z=0$ 4. $x+2y+3z+4=0$

5. $2x+y-3z+8=0$

10. $\left[\frac{1}{a}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1},\ \frac{1}{b}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1},\ \frac{1}{c}(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-1}\right]$

11. $x-y+z=0$ 14. 1 15. 2

16. 1 17. $\frac{1}{2}$ 20. 1 21. 6.

§23. கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகள் ஒரு தளத்தின் ஒரே மருங்கில் உள்ளனவா, அல்லவா என்பதைக் காணல்

தளத்தின் சமன்பாட்டை,

$$ax+by+cz+d=0$$

எனக் கொள்வோம். $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். A_1, A_2, தளத்தை B-ல் வெட்டட்டும். இப்பொழுது A_1A_2 ஐ B, $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் வெட்டினால், B ஆனது,

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

என்றிருக்கும். B, தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகையால்,

$$a\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)+b\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)+c\left(\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)+d=0.$$

அதாவது,

$$a(x_1+\lambda x_2)+b(y_1+\lambda y_2)+c(z_1+\lambda z_2)+d(1+\lambda)=0\cdot$$

அதாவது,

$$\lambda(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) + (ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = 0.$$

எனவே, $$\lambda = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}.$$

இங்கு λ-ன் மதிப்பு மிகையானால், B ஆனது $A_1 A_2$ஐ உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது. அதாவது A_1, தளத்தின் ஒரு மருங்கிலும், A_2, தளத்தின் மறுமருங்கிலும் அமைகின்றன. ஆகவே,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d, \ ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் மாறுபட்ட குறிகளையுடையனவாய் இருந்தால், A_1, தளத்தின் ஒரு மருங்கிலும், A_2, தளத்தின் மறுமருங்கிலும் இருக்கும். இதேபோல்.

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d, \ ax_2 + by_2 + cz_2 + d$$

ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் ஒரே குறிகளையுடையனவாய் இருந்தால், A_1-ம், A_2-ம் தளத்தின் ஒரே மருங்கில் அமைகின்றன என்பதையும் காணலாம்.

§24. இரு தளங்கள் உண்டாக்கும் கோணங்களின் சமவெட்டிகள்

தளங்களின் சமன்பாடுகளை

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

எனக் கொள்வோம். இங்கு d_1, d_2 என்பன மிகை எண்கள் எனவும் கொள்வோம். மிகை எண்ணாக இல்லாவிட்டால் சமன்பாட்டின் எல்லா உறுப்புகளையும் (-1) ஆல் பெருக்கி மாறிலியை மிகை எண்ணாக்கி விடலாம்.

இத் தளங்கள் வெளியை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. அவற்றில் ஆதி அமைந்துள்ள பகுதியை S_1 எனவும், அதற்கு எதிரிலுள்ள பகுதியை S_2 எனவும், மிகுந்த இரண்டு பகுதிகளையும் S_3, S_4 எனவும் படம் 21-ல் உள்ளவாறு குறிப்போம்.

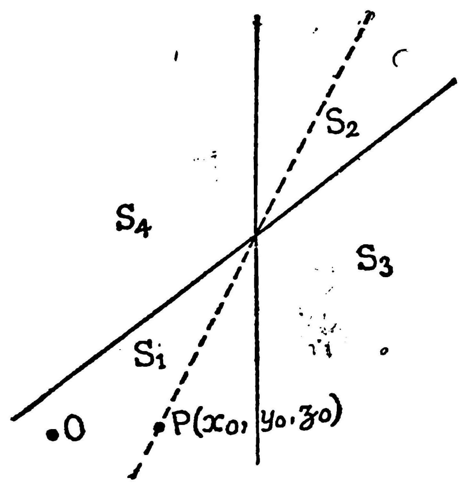
முதலில் பகுதி S_1-லும், S_2-லும் அமைந்துள்ள சமவெட்டியைக் கவனிப்போம். S_1 பகுதியில். இச் சமவெட்டியின் மீது அமைந்துள்ள $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இப் புள்ளி தளங்களிலிருந்து சம தூரங்களில் உள்ளதால்

$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad \ldots (24 \cdot 1)$$

ஆனால், ஆதியும் P-ம் $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ குறிக்கும் தளத்துக்கு ஒரு மருங்கில் உள்ளதால்,

$$a_1(0) + b_1(0) + c_1(0) + d_1,\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1$$

என்பன ஒரே குறியை உடையன.



படம் 21.

அதாவது

$$d_1,\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1$$

என்பன ஒரே குறியை உடையன. இங்கு d_1 ஒரு மிகை எண். எனவே,

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1$$

ஒரு மிகை எண். இதுபோலவே,

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2\text{-ம்}$$

ஒரு மிகை எண். ஆகவே, (24·1) ஐ

$$\frac{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} + \frac{a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். (x_0, y_0, z_0) ஆனது S_1-ல் அமைந்தாலும் இவ்விளைவே கிடைக்கும் என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, S_1 லும், S_2-லும் அமைந்துள்ள சமவெட்டித் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

என்றாகிறது.

இது போலவே S_3-லும், S_4-லும் அமையும் சமவெட்டித் தளத்தின் சமன்பாடு,

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = -\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad \dots (24 \cdot 2)$$

என அடையலாம்.

§25. $P+\lambda P'$ என்னும் சமன்பாடு

இப்பொழுது P-ம், P'-ம்

$$ax+by+cz+d, \quad a'x+b'y+c'z+d'$$

என்ற கோவைகளைக் குறித்தால், $P+\lambda P'=0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையைக் காண்போம். இங்கு λ ஒரு மெய்யெண். $P+\lambda P'=0$ ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாடு ஆகவே, இஃது ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது. மேலும் (x_1, y_1, z_1) என்பது, தளங்கள்

$$ax+by+cz+d=0, \quad a'x+b'y+c'z+d'=0$$

வெட்டும் நேர் கோட்டின்மீதுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியானால்,

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0, \quad a'x_1+b'y_1+c'y_1+d'=0.$$

இவற்றிலிருந்து, (x_1, y_1, z_1) ஆனது $P+\lambda P'=0$ குறிக்கும் தளத்திலும் அமைகிறது என்பது தெரிகிறது. அதாவது, தளம் $P+\lambda P'=0$ ஆனது, சமன்பாடுகள்

$$P=0, \quad P'=0$$

குறிக்கும் தளங்கள் வெட்டும் நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகிறது எனத் தெரிகிறது.

§26. சமன்பாடு $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$

இங்குச் சமன்பாடு

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0 \quad \dots (26 \cdot 1)$$

குறிக்கும் இயங்குவரை யாது எனப் பார்ப்போம். (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளி, தளம் $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$-ன் மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்றால்,

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=0$$

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $(26 \cdot 1)$ ஐ (x_1, y_1, z_1) திருப்தி செய்கிறது என்பது தெரிகிறது. ஆகவே, (x_1, y_1, z_1) ஆனது சமன்பாடு $(26 \cdot 1)$ குறிக்கும் இயங்குவரை மேலுள்ள ஒரு புள்ளி எனத் தெரிகிறது.

அதாவது தளம்

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும், சமன்பாடு (26·1) குறிக்கும் இயங்குவரையின் மேலும் உள்ளது என்று தெரிகிறது.

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும், சமன்பாடு (26·1) குறிக்கும் இயங்குவரையின் மேலும் உள்ளது என அறிகிறோம். இம் மாதிரியே சமன்பாடு (26·1) குறிக்கும் இயங்குவரையின் மேலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும், சமன்பாடு

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

குறிக்கும் தளத்தின் மேல் அல்லது சமன்பாடு

$$a_2x + b_2y + e_2z + d = 0$$

குறிக்கும் தளத்தின் மேல் உள்ளது என்று நிறுவலாம். ஆகவே, சமன்பாடு (26·1) ஆனது இரு தளங்களின் இணைந்த சமன்பாடாகும். இத் தளங்களின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்,

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$$

என்பன.

குறிப்பாக, சமன்பாடு

$$(a_1x + b_1v + c_1z)(a_2x + b_2y + c_2z) = 0$$

ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரண்டு தளங்களைக் குறிப்பிடுறது.

§27. ஒரு சமச்சீர் இருபடிச் சமன்பாடு, இரண்டு தளங்களைக் குறிப்பதற்கான வேண்டிய நிபந்தனை

ஒரு சமச்சீர் இருபடிச் சமன்பாடானது,

(ஒரு சமச்சீர் ஒருபடிச் சமன்பாடு) × (ஒரு சமச்சீர் ஒருபடிச் சமன்பாடு) = 0

என்ற வடிவில் எழுதப்படுமானால் அச் சமன்பாடு, ஆதி வழிச் செல்லும் இரண்டு தளங்களைக் குறிக்கின்றது என்று § 26-ல் கண்டோம். ஆயினும், ஒவ்வொரு சமச்சீர் இருபடிச் சமன்பாடும் இரண்டு தளங்களை குறிப்பதற்கில்லை என்பதைக் கூம்பு (cone) பற்றிப் படிக்கும் போது அறியலாம்.

இப்பொழுது சமச்சீர் இருபடிச் சமன்பாடு,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

இரண்டு தளங்களைக் குறிக்குமானால்,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = c$$

எனக் காட்டுவோம். சமன்பாடு குறிக்கும் தளங்களின் தனித் தனிச் சமன்பாடுகள்

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

என்றால்,

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y$$
$$= (a_1 x + b_1 y + c_1 z)\ (a_2 x + b_2 y + c_2 z)$$

என எழுதலாம். இங்குக் குணங்களை ஒப்பிடக் கிடைக்கும் விளைவுகளாவன :

x^2, y^2, z^2 உள்ள உறுப்புகளை ஒப்பிடக் கிடைப்பது	yz, zx, xy உள்ள உறுப்புகளை ஒப்பிடக் கிடைப்பது
$a_1 a_2 = a$	$b_1 c_2 + b_2 c_1 = 2f$
$b_1 b_2 = b$	$c_1 a_2 + c_2 a_1 = 2g$
$c_1 c_2 = c$	$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2h$

இப்பொழுது கீழ்க்காணும் அணிக்கோவைகளின் பெருக்கல் பலனைக் காண்போம். அணிகோவைகள் இரண்டும் பூச்சியத்திற்குச் சமம். ஆகவே,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது
$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 + a_2 a_1 & a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 c_2 + a_2 c_1 \\ b_1 a_2 + b_2 a_1 & b_1 b_2 + b_2 b_1 & b_1 c_2 + b_2 c_1 \\ c_1 a_2 + c_2 a_1 & c_1 b_2 + c_2 b_1 & c_1 c_2 + c_2 c_1 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது $\begin{vmatrix} a+a & 2h & 2g \\ 2h & b+b & 2f \\ 2g & 2f & c+c \end{vmatrix} = 0$

அதாவது, $8 \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

அதாவது, $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

அல்லது,

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

இதன் மறுதலையையும், அதாவது

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

பூச்சியத்திற்குச் சமமானல், சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரண்டு தளங்களைக் குறிக்கின்றது என்பதையும் நிறுவ இயலும்.

§28. ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரண்டு தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம்

இங்கு ஆதி வழிச் செல்லும் இரு தளங்களின் இணைந்த சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

என்றும், தளங்கள் உண்டாக்கும் கோணம் θ என்றும் இருந்தால்,

$$\tan\theta = \pm \frac{2\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - bc - ca - ab}}{a + b + c}$$

எனக் காட்டுவோம். சமன்பாட்டில் இடது கைப்பக்கம் உள்ள கோவையை

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$
$$= (a_1x + b_1y + c_1z)(a_2x + b_2y + c_2z)$$

என்று எழுதலாம்.

இங்கு $a = a_1 a_2$ $\qquad 2f = b_1 c_2 + b_2 c_1$

$b = b_1 b_2$ $\qquad 2g = c_1 a_2 + c_2 a_1$

$c = c_1 c_2$ $\qquad 2h = a_1 b_2 + a_2 b_1$

மேலும், தளங்களின் தனிப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0.$$

ஆகவே, இத் தளங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணம் θ என்றால்,

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos^2\theta = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)} \qquad (28\cdot1)$$

ஆனால், $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a + b + c$.

$$\begin{aligned}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + (b_1^2 c_2^2 + b_2^2 c_1^2) \\ &\quad + (c_1^2 a_2^2 + c_2^2 a_1^2) + (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) \\ &= a^2 b^2 + c^2 + (b_1 c_2 + b_2 c_1)^2 - 2 b_1 b_2 c_1 c_2 \\ &\quad + (c_1 a_2 + c_2 a_1)^2 - 2 c_1 c_2 a_1 a_2 \\ &\quad + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + \{(2f)^2 - 2bc\} \\ &\quad + \{(2g)^2 - 2ca\} + \{(2h)^2 - 2ab\} \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) \\ &\quad + 4(f^2 + g^2 + h^2)\end{aligned}$$

ஆகவே,

$$\cos^2\theta = \frac{(a+b+c)^2}{(a^2 + b^2 + c^2 - 2.bc - 2ca - 2ab) + 4(f^2 + g^2 + h^2)},$$

$$\sec^2\theta = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) + 4(f^2 + g^2 + h^2)}{(a+b+c)^2}$$

எனவே $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) + 4(f^2 + g^2 + h^2)}{(a+b+c)^2} - 1$$

$$= \frac{4(f^2 + g^2 + h^2 - ab - bc - ca)}{(a+b+c)^2}$$

ஆகவே, $\tan\theta = \pm \dfrac{2(f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca)^{\frac{1}{2}}}{a+b+c}$

$$\theta = \pm \tan^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca}}{a+b+c}\right\}. \quad \ldots \quad (28\cdot2)$$

விளைவு (28·1) அல்லது விளைவு (28·2)-லிருந்து $a+b+c=0$ என்றால், தளங்கள் செங்குத்தானவை என்பதை எளிதில் காணலாம்.

§ 29. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : சமன்பாடுகள்

$2x+2y+z+1=0$, $2x-3y-6z-1=0$ குறிக்கும் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

வேண்டிய சமன்பாடுகள்

$$\frac{2x+2y+z+1}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \pm \frac{2x-3y-6z-1}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-6)^2}}.$$

அதாவது $7(2x+2y+z+1) = \pm 3(2x-3y-6z-1)$.

அதாவது $8x+23y+25z+10=0$, $20x+5y-11z+4=0$.

கணக்கு 2 : சமன்பாடுகள்

$$2x+2y+z+1=0,\ 2x-3y-6z-1=0$$

குறிக்கும் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள குறுங்கோணத்தின் சமவெட்டியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

முந்திய கணக்கில் கோணங்களின் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகளை,

$8x+23y+25z+10=0$, $20x+5y-11z+4=0$ எனக் கண்டோம். இவற்றில்,

$$8x+23y+25z+10=0$$

குறிக்கும் சமவெட்டிக்கும், சமன்பாடு

$$2x+2x+z+1=0$$

குறிக்கும் காலத்திற்கும் இடையிலுள்ள கோணங்களைப்பற்றிக் கவனிப்போம். அவற்றில் குறுங்கோணத்தை θ எனக் குறித்தால்,

$$\cos\theta = \frac{|(8)(2)+(23)(2)+(25)(1)|}{\sqrt{8^2+23^2+25^2}\ \sqrt{2^2+2^2+1}}$$

$$= \frac{87}{\sqrt{1218}\,(3)} = \frac{29}{\sqrt{1218}}$$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\cos 45^\circ}\right)^2 = \frac{29\times 29\times 2}{1218} = \frac{29}{21} > 1$$

அதாவது $\cos\theta > \cos 45^\circ$

ஆகவே $\theta < 45^\circ$

இதிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளங்கள் உண்டாக்கும் குறுங்கோணத்தின் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$8x + 23y + 25z + 10 = 0$$

என்றும் விரிகோணத்தின் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$20x + 5y - 11z + 4 = 0$$

என்றும் தெரிகிறது.

கணக்கு 3: சமன்பாடுகள்,

$$2x + 2y + z + 1 = 0, \quad 2x - 3x - 6z - 1 = 0$$

குறிக்கும் தளங்கள், வெளியைப் பிரிக்கும் நான்கு பகுதிகளில், விரிகோணத்தைச் சார்ந்த பகுதியில் ஆதி அமைந்துள்ளது எனக் காட்டுக.

சமன்பாடுகளிலுள்ள மாறிலிகள் மிகை எண்களாக இருக்குமாறு, சமன்பாடுகளை

$$2x + 2y + z + 1 = 0, \quad 2x + 3y + 6z + 1 = 0$$

என எழுதலாம். இத் தளங்கள் உண்டாக்கும் கோணங்களின் சமவெட்டிகளில், ஆதிப் பகுதியைச் சார்ந்த சமவெட்டியானது,

$$\frac{2x + 2y + z + 1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \frac{-2x + 3y + 6z + 1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 3^2}}$$

என்று விளைவு (24·1)-ன் மூலம் அறிகிறோம். இச் சமன்பாடு

$$20x + 5y - 11z + 4 = 0$$

என்று சுருங்குகிறது. இச் சமவெட்டி விரிகோணத்தைச் சார்ந்தது என்று முந்திய கணக்கில் அறிந்தோம்.

கணக்கு 4 : தளங்கள்

$$2x - y + 3z + 1 = 0, \quad 3x - 2y - z + 3 = 0$$

வெட்டும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்று, தளம் $x + y + z + 2 = 0$-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இத் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வேண்டிய சமன்பாடு

$$(2x - y + 3z + 1) + \lambda(3x + 2y - z + 3) = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். அதாவது

$$(2 + 3\lambda)x + (-1 + 2\lambda)y + (3 - \lambda)z + (1 + 3\lambda) = 0$$

என்றிருக்கும். இத்தளம், தளம்

$$x + y + z + 2 = 0\text{-க்குச் செங்குத்தானது.}$$

ஆகவே,

$$(2 + 3\lambda)(1) + (-1 + 2\lambda)(1) + (3 - \lambda)(1) = 0$$

அதாவது, $4\lambda + 4 = 0$

அதாவது, $\lambda = -1.$

எனவே, வேண்டிய சமன்பாடு

$$(2x - y + 3z + 1) + (-1)(3x + 2y - z + 3) = 0$$

அதாவது, $x + 3y - 4z + 2 = 0$

ஆகும்.

கணக்கு 5 : சமன்பாடு

$$ax^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2yz + 3x - 5xy = 0$$

ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரு தளங்களைக் குறித்தால் a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு "$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$"

அதாவது

$$\begin{vmatrix} a & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & & -2 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது $\begin{vmatrix} 2a & -5 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

அதாவது $72 - 72a = 0$

ஆகவே, $a = 1.$

§30. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடுகள் $2x+2y-z+1=0, 3x+4y+12z-2=0$ குறிக்கும் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களின் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(2) சமன்பாடுகள் $2x \;\; 2y-z+1=0, 3x+4y+13z-2=0$ குறிக்கும் தளங்கள் இடையிலுள்ள குறுங்கோணத்தின் சமவெட்டியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) சமன்பாடுகள் $2x+2y-z+1=0, 3x+4y+12z-2=0$ குறிக்கும் தளங்கள் உண்டாக்கும் குறுங்கோணப் பகுதியில் ஆதி அமைந்துள்ளது எனக் காட்டுக.

(4) தளங்கள் $x-2y+2z+4=0$, $2x+3y-6z-1=0$ உண்டாக்கும் குறுங்கோணத்தின் சமவெட்டியின் சமன்பாடு $x-23y \cdot 32z+31=0$ என்றும், விரிகோணத்தின் சமவெட்டியின் சமன்பாடு $13x-5y-4z+25=0$ என்றும் காட்டுக.

(5) தளங்கள் $x+2y+4x \;\; 1=0$, $4x+3y+2z+3=0$ வெட்டும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்று, புள்ளி $(1, -1, -1)$ வழியாகவும் செல்லுகிறது இத் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(6) தளங்கள் $x+2y+3z+2=0$, $2x+3y-z+3=0$ வெட்டும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்று, தளம் $x+y+z=0$-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இத் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(7) தளங்கள் $x+2y+3z+2=0$, $2x+3y-z+3=0$ வெட்டும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்று 1, 1, 1 திசை விகிதங்கள் கொண்ட ஒரு கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளது. இத் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(8) தளம் $2x - y + 3z + 5 = 0$.

தளம் $5x - 4y - 2z + 1 = 0$ ஐ l என்ற கோட்டில் வெட்டுகிறது. தளம் $2x - y + 3z + 5 = 0$ ஆனது l ஐப் பொறுத்து $90°$ சுழன்றால், இத் தளத்தின் புதிய நிலையில் இதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(9) சமன்பாடு $x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2yz + zx - 5xy = 0$, ஆதிவழிச் செல்லும் இரண்டு தளங்களைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

(10) சமன்பாடு $x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2yz + zx - 5xy = 0$ குறிக்கும் தளங்களின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(11) சமன்பாடு $x^2 - y^2 + cz^2 - 3yz + zx = 0$, ஆதி வழிச் செல்லும் இரு தளங்களைக் குறித்தால் c-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(12) சமன்பாடு $x^2 - y^2 + cz^2 - 3yz + zx = 0$ ஆதி வழிச் செல்லும் இரு தளங்களைக் குறித்தால் தளங்களின் தனித் தனிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(13) சமன்பாடு $ax^2 + y^2 + cz^2 + 2yz + zx + 3xy = 0$ ஆதி வழிச் செல்லும் இரு செங்குத்தான தளங்களைக் குறித்தால் a-ன் மதிப்பையும், c-ன் மதிப்பையும் காண்க.

(14) $$x^2 + y^2 + 4z^2 + 4yz + 4zx + 2xy + 7(x + y + 2z) + 12 = 0$$

என்னும் சமன்பாடு குறிக்கும் இணையான தளங்களின் தனித் தனிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $17x + 14y - 49z + 19 = 0$, $35x + 38y + 23z + 7 = 0$

(2) $35x + 38y + 23z + 7 = 0$

(5) $9x + 8y + 8z + 7 = 0$

(6) $4x + 5y - 9z + 5 = 0$

(7) $4x + 5y - 9z + 5 = 0$

(8) $27x - 24y - 26z - 13 = 0$

(10) $x - y - z = 0$, $x - 4y + 2z = 0$

(11) -2

(12) $x-y-z=0, \quad x+y+2z=0$

(13) $a=2,\ c=-3;\quad a=-\dfrac{7}{4},\quad c=\dfrac{3}{4}$

(14) $x+y+2z+3=0, \quad x+y+2z+4=0.$

§31. ஒரு நான்முகியின் பருமன் (volume of a tetrahedron)

இங்கு

$A_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $A_2\ (x_2, y_2, z_2)$, $A_3\ (x_3, y_3, z_3)$, $A_4\ (x_4, y_4, z_4)$ என்ற புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட ஒரு நான்முகியின் பருமனைக் காண்போம். முக்கோணம் $A_1 A_2 A_3$-ன் பரப்பு Δ என்றும், எதிர்முனை A_4-லிருந்து முகம் $A_1 A_2 A_3$-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p என்றும் இருந்தால், நான்முகியின் பருமனை V,

$$V=\frac{\Delta p}{3}$$

என்றவாறு இருக்கும் என்பது நாம் அறிந்ததே. இதில்

$$\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_{yz}^2+\Delta_{zx}^2+\Delta_{xy}^2}$$

என்று (14·1)-ல் கண்டோம். இங்கு

$$\Delta_{xy}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{yz}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{zx}=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},$$

தளம் $A_1 A_2 A_3$-ன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

என்பதை (20·3)-ல் கண்டோம்.

இச் சமன்பாட்டைக் கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$x\,\Delta_{yz} - y\,\Delta_{xz} + z\,\Delta_{xy} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

அதாவது $x\,\Delta_{yz} + y\,\Delta_{zx} + z\,\Delta_{xy} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

எனவே, (19·5)-லிருந்து

$$\pm p = \frac{x_4\,\Delta_{yz} + y_4\,\Delta_{zx} + z_4\,\Delta_{xy} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta^2_{yz} + \Delta^2_{zx} + \Delta^2_{xy}}}$$

$$= \frac{x_4\,\Delta_{yz} - y_4\,\Delta_{xz} + z_4\,\Delta_{xy} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta^2_{yz} + \Delta^2_{zx} + \Delta^2_{xy}}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\,\Delta}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{2\,\Delta}$$

எனவே,

$$\pm \triangle P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

ஆனால், $V = \frac{1}{3}\triangle p$ ஆகையால்,

$$\pm 3V = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

ஆகவே, $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$-ன்

தனிப் பெறுமானம் (absolute value).

§ 32. மாதிரிக் கணக்கு

கணக்கு 1. x, y, z அச்சுத் துண்டுகளை a, b, c ஆக உடைய ஒரு தளம், கூற்றுத் தளங்களுடன் அமைக்கும் நான்முகியின் பருமனைக் காண்க.

நான்முகியின் முனைகள்,

$(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$

என்பன. ஆகவே, நான்முகியின் பருமன் V என்றால்,

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{6}(-abc)$-ன் தனிப் பெறுமானம்

$= \frac{1}{6} \mid abc \mid$

§33. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) புள்ளிகள் $(1, 0, 1)$, $(-2, 1, 2)$, $(4, -1, 2)$, $(4, 1, 0)$ முதலியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நான்முகியின் பருமனைக் காண்க.

(2) தளங்கள் $y+z=0$, $z+x=0$, $x+y=0$, $x+y+z=1$ உண்டாக்கும் நான்முகியின் பருமனைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: தளங்களின் வெட்டுப் புள்ளிகள் $(0, 0, 0)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$.]

(3) தளங்கள் $my+nz=0$, $nz+lx=0$, $lx+my=0$, $lx+my+nz=p$ உண்டாக்கும் நான்முகியின் பருமன்

$$\frac{2p^3}{3lmn}$$

எனக் காட்டுக.

(4) புள்ளிகள் $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ முதலியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நான்முகியின் பருமன் யாது?

(5) ஒரு நகரும் தளம் x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. நான்முகி $OABC$-ன் பருமன் மாறிலி k ஆனால், முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: A, B, C என்பன $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ என்றும், முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (x_0, y_0, z_0) என்றும் கொண்டால், நான்முகியின் பருமனின் வர்க்கம்

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{36} = k^2.$$

மேலும், $3x_0 = a$, $3y_0 = b$, $3z_0 = c$.]

(6) ஒரு நகரும் தளம் x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. நான்முகி $OABC$-ன் பருமன் மாறிலி k ஆனால், நான்முகியின் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : A, B, C என்பன $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ என்றால், மையக் கோட்டுச் சந்தி,

$$\left(\frac{0+a+0+0}{4}, \frac{0+0+b+0}{4}, \frac{0+0+0+c}{4}\right).$$]

விடைகள்

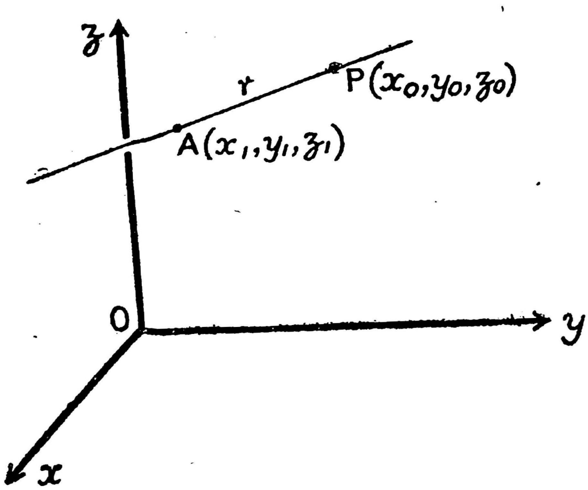
1. 2 2. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{|abc|}{6}$

5. $81x^2y^2z^2 = 4k^2$ 6. $1024x^2y^2z^2 = 9k^2$.

4. நேர்கோடு

§ 34. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள்.

புள்ளி A (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லுமாறும், திசைக் கொசைன்கள் l, m, n கொண்டதுமாகவும் உள்ள ஒரு நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை இங்குக் காண்போம்.



படம் 22.

$P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியைப் படம் 22-ல் உள்ளவாறு நேர்கோட்டின்மீது எடுத்துக் கொள்வோம். அப்படியாயின் நேர்கோட்டின் திசைக் கோசைன்கள்

$$\frac{x_0 - x_1}{AP}, \quad \frac{y_0 - y_1}{AP}, \quad \frac{z_0 - z_1}{AP}$$

என்பனவாகும் என்று § 10-லிருந்து அறிகிறோம்.

ஆகவே

$$\frac{x_0 - x_1}{AP} = l, \quad \frac{y_0 - y_1}{AP} = m, \quad \frac{z_0 - z_1}{AP} = n$$

என்றும், இவற்றை இணைத்து எழுத,

$$\frac{x_0 - x_1}{l} = \frac{y_0 - y_1}{m} = \frac{z_0 - z_1}{n} = AP$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இதிலிருந்து நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad \dots \quad (34{\cdot}1)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாட்டில் இரண்டு சார்பற்ற சமன்பாடுகள் (independant equations) அடங்கியுள்ளதால், விளைவு (34·1) ஐ நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள் என்று பன்மையில் கூறுகிறோம். சமன்பாடுகள் (34·1) ஐ

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = AP = r$$

என்று எழுதினால், r ஆனது, நேர்கோட்டின்மீதுள்ள (x, y, z) என்ற புள்ளி, (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து இருக்கும் தூரத்தைக் குறிக்கின்றது. இங்கு,

$$\begin{aligned} x &= lr + x_1 \\ y &= mr + y_1 \\ z &= nr + z_1. \end{aligned}$$

ஆகவே, புள்ளி

$$(x_1 + lr, y_1 + mr, z_1 + nr) \qquad \dots \quad (34{\cdot}2)$$

ஆனது நேர்கோட்டின் மேலுள்ளது என்றும், இப் புள்ளி, புள்ளி (x_1, y_1, z_1)-லிருந்து r தூரத்தில் உள்ளது என்றும் அறிகிறோம். இங்கு r துணையலகு. அதாவது r-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு, நேர்கோட்டின் வெவ்வேறு புள்ளிகள் கிடைக்கும்.

சமன்பாடுகள் (34·1)-ல் உள்ள பின்னங்களின் பகுதிகளை எந்த எண் c ஆலும் பெருக்கி, சமன்பாடுகளை

$$\frac{x - x_1}{cl} = \frac{y - y_1}{cm} = \frac{z - z_1}{cn}$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். இவற்றில் cl, cm, cn என்பன நேர்கோட்டின் ஒரு கண திசை விகிதங்கள். ஆகவே, λ, μ, ν என்பன நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் என்றால், நேர்கோட்டின்

சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-y_1}{\mu}=\frac{z-z_1}{\nu}=k \quad \ldots \quad (34\cdot3)$$

என்று எழுதலாம். மேலும், நேர்கோட்டின் மேலுள்ள எப் புள்ளியையும்

$$(x_1+k\lambda,\ y_1+k\mu,\ z_1+k\nu) \quad \ldots \quad \ldots \quad (34\cdot4)$$

என்றும் எழுதலாம். இங்கு k துணையலகு. அதாவது k வெவ் வேறு மதிப்புகளைப் பெறும்போது, (34·4) கோட்டின் மேலுள்ள வெவ்வேறு புள்ளிகளைக் குறிக்கும். (34·2)-ல் உள்ள r-க்கும், (34·4)-ல் உள்ள k-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டை அறிய வேண் டியது வெகு முக்கியம்.

கடைசியாக புள்ளிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்போம்.

$$x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1$$

என்பன இக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள். ஆகவே, கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

என்று எளிதில் கிடைக்கின்றது.

§ 35. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகளின் தன்மை

ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-y_1}{\mu}=\frac{z-z_1}{\nu} \quad \ldots \quad (35\cdot1)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் என்று கண்டோம். இவ்வடிவிலிருக்கும் போது, சமன்பாடுகள் சமச்சீர் வடிவத்தில் உள்ளன என்று கூறப் படுகின்றன. இச் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-y_1}{\mu}=\frac{z-z_1}{\nu}=k$$

என்று எழுதி,

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+\lambda k\\ y&=y_1+\mu k\\ z&=z_1+\nu k\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (35\cdot2)$$

என்று எழுதினால், சமன்பாடுகள் (35·2) ஐ நேர்கோட்டின் துணையலகுச் சமன்பாடுகள் என்கிறோம்.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-y_1}{\mu},\quad \frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{z-z_1}{\nu}$$

என்று எழுதினால், இரண்டு ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இச் சமன்பாடுகளை மாற்றி எழுத,

$$x=\frac{\lambda}{\mu}y+\left(x_1-\frac{\lambda}{\mu}y_1\right),\quad x=\frac{\lambda}{\nu}z+\left(x_1-\frac{\lambda}{\nu}z_1\right)$$

என்றும், இதிலிருந்து ஒரு நேர்கோடானது இரண்டு தளங்களின் வெட்டு (intersection) என்றும் கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாடுகளை

$$x=ay+b,\qquad x=cz+d$$

என்று மேலும் மாற்றி எழுதினால், ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள் நான்கு மாறிலிகளைக் கொண்டிருக்கும் எனத் தெரிகிறது.

கடைசியாகச் சமன்பாடுகள்

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad \dots \quad \dots \quad (35\cdot 3)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \quad \dots \quad \dots \quad (35\cdot 4)$$

குறிக்கும் நேர்கோட்டின் சமச்சீரான சமன்பாடுகளைக் காண்போம். இக் கோடு xOy தளத்தை,

$$(x_1,\ y_1,\ 0)$$

என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். இப் புள்ளி சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்வதால்,

$$a_1x_1+b_1y_1+d_1=0$$

$$a_2x_1+b_2y_1+d_2=0.$$

இச் சமன்பாடுகளை x_1-க்கும், y_1-க்கும் விடுவிக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix}}=\frac{-y_1}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1\\ a_2 & d_2\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}},\ \dots \quad (35\cdot 5)$$

$$\frac{x_1}{b_1d_2-b_2d_1}=\frac{-y_1}{a_1d_2-a_2d_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

$$x_1=\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y_1=\frac{a_2d_1-a_1d_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடு, சமன்பாடு

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

குறிக்கும் தளத்தில் அமைந்துள்ளது. ஆகவே இக் கோடு, தளத்தின் செங்கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது. ஆனால், செங் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் a_1, b_1, c_1. எனவே, கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்

$$l, m, n$$

என்றால்,

$$a_1l + b_1m + c_1n = 0 \qquad \dots \qquad \dots \quad (35 \cdot 6)$$

என்றும், இதுபோலவே சமன்பாடு $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ குறிக்கும் தளத்திலும் கோடு அமைவதால்,

$$a_2\, l + b_2\, m + c_2\, n = 0 \qquad (35 \cdot 7)$$

என்றும் பெறுகிறோம். இப்பொழுது (35·6), (35·7) ஆகியவற்றி லிருந்து

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-m}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

என்று பெறுகிறோம். எனவே, கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \dots \; (35 \cdot 8)$$

ஆகும். ஆகவே, கோட்டின் சமச்சீர் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - 0}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

என்று எழுதலாம்.

§ 36. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : புள்ளி (5, 5, 5) வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு $3x - 2y + 4z + 5 = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும் உள்ள கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் 3, −2, 4 ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட கோடு, தளத்திற்குச் செங்குத்தாக

உள்ளதால், அதன் திசை விகிதங்களும்

$$3,\ -2,\ 4$$

ஆகியவையே. ஆகவே, கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-5}{4}$$

ஆகும்.

கணக்கு 2. புள்ளி (6, 6, 6) வழியாகச் செல்லும் கோடு ஒன்று, சமன்பாடுகள்;

$$2x+2y-2z+1=0,\ 3x-3y+z+2=0$$

குறிக்கும் தளங்கள் இரண்டுக்கும் இணையாக உள்ளது. கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

கோட்டின் திசைக் கொசைன்களை l, m, n எனக் கொள்வோம். கோடு, தளங்களின் செங்கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இங்குச் செங்கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்,

$$2,\ 2,\ -2; \qquad 3,\ -3,\ 1$$

ஆகும். ஆகவே,

$$2l+2m-2n=0,$$
$$3l-3m+n=0.$$

எனவே,

$$\frac{l}{\begin{vmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-m}{\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{n}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}}$$

அதாவது $\dfrac{l}{-4}=\dfrac{-m}{8}=\dfrac{n}{-12}$

அதாவது $\dfrac{l}{1}=\dfrac{m}{2}=\dfrac{n}{3}$.

ஆகவே கோட்டின் திசை விகிதங்கள் 1, 2, 3 ஆகும். ஆனால் கோடு, புள்ளி (6, 6, 6) வழியாகச் செல்லுகிறது. எனவே, கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-6}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-6}{3}$$

என்பவையாகும்.

கணக்கு 3 : சமன்பாடுகள் $2x - 3y + z + 4 = 0$, $x + y + 2z - 3 = 0$ குறிக்கும் கோட்டின் சமச்சீர்ச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இக் கோடு, xOy தளத்தை வெட்டும் புள்ளியை $(x_1, y_1, 0)$ எனக் கொள்வோம். இப் புள்ளி, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் இரண்டையும் திருப்தி செய்யும். ஆகையால்,

$$2x_1 - 3y_1 + 4 = 0$$
$$x_1 + y_1 - 3 = 0$$

என்றும், இவற்றை x_1-க்கும், y_1-க்கும் விடுவிக்க

$$x_1 = 1, \; y_1 = 2$$

என்றும் பெறுகிறோம். ஆகவே

$$(1, 2, 0)$$

என்பது கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகிறது.

மேலும் கோடு, சமன்பாடுகள்

$$2x - 3y + z + 4 = 0$$
$$x + y + 2z - 3 = 0$$

குறிக்கும் தளங்களின் செங்கோடுகளுக்குச் செங்குத்தானது. ஆனால், இச் செங்கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்

$$2, -3, 1; \quad 1, 1, 2$$

ஆகும். ஆகவே, கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்

$$l, m, n$$

என்றால்,

$$2l - 3m + n = 0$$
$$l + m + 2n = 0$$

என்றும்,

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. அதாவது,

$$\frac{l}{-7} = \frac{-m}{3} = \frac{n}{5}$$

அல்லது $\frac{l}{7} = \frac{m}{3} = \frac{n}{-5}$.

ஆகவே, கோட்டின் திசை விகிதங்கள் 7, 3, −5.

எனவே, கோட்டின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-0}{-5}$$

ஆகும்.

§ 37. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) கீழ்க்காணும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(i) 2, 3, 4 திசை விகிதங்களைக் கொண்ட கோடு, புள்ளி (5, 5, 5) வழியாகச் செல்லுகிறது.

(ii) புள்ளி (4, 7, 8) ஐயும், புள்ளி (2, 1, 0) ஐயும் இணைக்கும் கோட்டுக்கு இணையான கோடு. இக் கோடு புள்ளி (− 1, 2, − 3) வழியாகச் செல்லுகின்றது.

(iii) புள்ளி (5, −6, 8) வழியாகச் செல்லும் கோடு. இது தளம் $2x - 3y + 4z + 1 = 0$-க்குச் செங்குத்தாயுள்ளது.

(iv) சமன்பாடுகள் $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$ குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையான கோடு. இக் கோடு (a, b, c) வழியாகச் செல்லுகிறது.

(v) சமன்பாடுகள் $(x-2y+z+3=0,\ 2x-y-z+5=0$ குறிக்கும் தளங்கள் இரண்டுக்கும் இணையான கோடு. இக் கோடு, புள்ளி (2, 2, 2) வழியாகச் செல்லுகிறது.

(2) கீழ்க்காணும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(i) 2, −3, −4 திசை விகிதங்களைக் கொண்ட கோடு இது. புள்ளி (1, −1, 1) வழியாகச் செல்லுகிறது.

(ii) புள்ளி (−2, 0, 1) ஐயும், புள்ளி (2, −1, 3) ஐயும் இணைக்கும் கோட்டுக்கு இணையான கோடு. இக் கோடு புள்ளி (−1, 0, 0) வழியாகச் செல்லுகின்றது.

(iii) புள்ளி (1, 1, 1) வழியாகச் செல்லும் கோடு. இது தளம் $x + y + z = 0$-க்குச் செங்குத்தாயுள்ளது.

(iv) சமன்பாடுகள் $\frac{5x+2}{2} = -y+2 = 3z$ குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையான கோடு. இக் கோடு (4, 4, 4) வழியாகச் செல்லுகிறது.

(v) சமன்பாடுகள் $x+2y+3z+4=0$, $3x+4y+5z+6$ குறிக்கும் தளங்கள் இரண்டுக்கும் இணையான கோடு. இக் கோடு புள்ளி (−2, 4, 2) வழியாகச் செல்லுகிறது.

(3) சமன்பாடுகள் $x-2y+z+3=0$, $3x-z-3=0$ இரண்டும் குறிக்கும் தளங்கள் வெட்டும் கோட்டின் திசை விகிதங்களைக் காண்க.

(4) சமன்பாடுகள் $x-2y+z+3=0$, $3x-z-3=0$ இரண்டும் குறிக்கும் கோடு, xOy தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(5) சமன்பாடுகள் $x-2y+z+3=0$, $3x-z-3=0$ இரண்டும் குறிக்கும் கோட்டின் சமச்சீர்ச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(6) சமன்பாடுகள் $4x-4y+z+1=0$, $x+2y-2z+1=0$ இரண்டும் குறிக்கும் கோட்டின் சமச்சீர்ச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(7) சமன்பாடுகள்

$$4x-4y+z+1=0, \quad x+2y-2z+1=0$$

இரண்டு குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையாயுள்ள கோடு ஒன்று, புள்ளி (5, 5, 5) வழியாகச் செல்லுகிறது. இக் கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(8) சமன்பாடுகள்

$$x+y+2z-1=0, \quad 2x+y+3z+2=0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையாயுள்ள கோடு ஒன்று, (1, 2, 3) வழியாகச் செல்லுகின்றது. கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(9) சமன்பாடுகள்

$$x-y+z-1=0, \quad 3x-y-z+1=0$$

குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடுகள் $x+4y-z-1=0$, $x+2y+z+1=0$ குறிக்கும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது எனக் காட்டுக.

(10) சமன்பாடு $4x^2 + 8y^2 + z^2 - 6yz + 5zx - 12xy = 0$ குறிக்கும் தளங்களை, தளம் $11x - 13y + 2z = 0$ ஆனது இரண்டு செங்குத்தான கோடுகளில் வெட்டுகிறது எனக் காட்டுக.

(11) சமன்பாடுகள் $5x - 7y + z = 0$, $7x - 5y - 11z = 0$ குறிக்கும் தளமானது வெட்டும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள குறுங்கோணத்தைக் காண்க.

(12) சமன்பாடுகள் $x = a_1 z + b_1$, $y = c_1 z + d_1$ குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடுகள் $x = a_2 z + b_2$, $y = c_2 z + d_2$ குறிக்கும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது ஆனால்,

$$a_1 a_2 + c_1 c_2 + 1 = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: சமன்பாடுகளில் z-ன் மதிப்பைக் கண்டு, கோட்டின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - d_1}{c_1} = \frac{z - 0}{1}\,;\quad \frac{x - b_2}{a_2} = \frac{y - d_2}{c_2} = \frac{z - 0}{1}$$

என்று எழுதலாம்.]

விடைகள்

(1) (i) $\frac{x-5}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-5}{3}$

(ii) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{4}$

(iii) $\frac{x-5}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z-8}{4}$

(iv) $\frac{x-a}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z-c}{4}$

(v) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$

(2) (i) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-4}$

(ii) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$

(iii) $x = y = z$ (iv) $\frac{x-4}{\frac{3}{5}} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{\frac{1}{5}}$

(v) $2x = -y = 2z$

(3) 1, 2, 3 (4) 1, 2, 0

(5) $x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3}$

(6) $\frac{x+\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+\frac{1}{4}}{3}=\frac{z}{4}$

(7) $\frac{x-5}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-5}{4}$

(8) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$ 11. 60°.

§ 38. ஒரு புள்ளியின் துணையலகுக் குறியீட்டுக் குறிப்பிடலின் பயன்கள்

ஒரு நேர்கோட்டின்மீதுள்ள புள்ளிகளைத் துணையலகுக் குறியீட்டால் குறிப்பிடலின் பயன்களை இங்குக் காண்போம். நேர்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$\lambda,\ \mu,\ \nu$$

என்றும், நேர்கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி

$$(x_1,\ y_1,\ z_1)$$

என்றும் இருந்தால், நேர்கோட்டின்மீதுள்ள புள்ளிகளை

$$(x_1+\lambda k,\ \ y_1+\mu k,\ \ z_1+\nu k)$$

என்ற துணையலகு வடிவில் எழுத முடியும் என்று முன்பே கண்டோம்.

முதலில், $A\ (x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, சமன்பாடு

$$ax+by+cz+d=0$$

குறிக்கும் தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி N-ன் கூறுகளைக் காண்போம் [படம் 23(a)]. NA ஆனது தளத்தின் ஒரு செங்கோடாகையால், அதன் திசை விகிதங்கள்

$$a,\ b,\ c$$

ஆகும். ஆகவே, N ஐ

$$(x_1+ak,\ \ y_1+bk,\ \ z_2+ck) \quad \dots\ (38\cdot1)$$

என்று எழுதலாம். ஆனால், N-ன் கூறுகள் தளத்தின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். ஆகவே, k-ன் மதிப்பைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

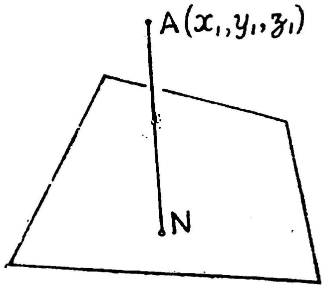
$$a(x_1 + ak) + b(y_1 + bk) + c(z_1 + ck) + d = 0$$

அதாவது

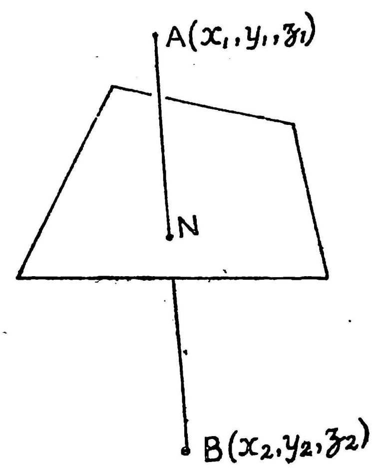
$$(a^2 + b^2 + c^2)\,k + (a x_1 + b y_1 + c z_1 + d) = 0$$

அதாவது $$k = -\frac{a x_1 + b y_1 + b z_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

இம்மதிப்பை (38·1)-ல் பிரதியிட N-ன் கூறுகள் கிடைக்கின்றன.



படம் 23 (a).



படம் 23 (b).

அடுத்தபடியாக, கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்தைப் பொருத்த A-ன் பிம்பத்தைக் (image) காண்போம் [படம் 23 (b)]. ANஐ $AN = NB$ என்றிருக்குமாறு நீட்டினல், B ஆனது A-ன் பிம்பமாகும். இங்கு B ஆனது (x_2, y_2, z_2) என்ருல்,

$$x_1 + ak = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

அதாவது $$2x_1 + 2\,ak = x_1 + x_2$$

அதாவது $$x_2 = x_1 + 2\,ak$$

இது போலவே $y_2 = y_1 + 2\,bk$, $z_2 = z_1 + 2\,ck$. ஆகவே, பிம்பம் B ஆனது,

$$(x_1 + 2ak,\ y_1 + 2bk,\ z_1 + 2ck)$$

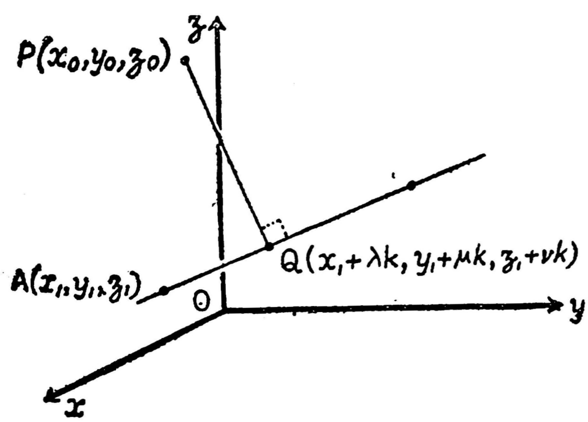
என்றிருக்கும். இங்கு

$$k = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

இரண்டாவதாக, புள்ளி $P(x_0, y_0, z_0)$-லிருந்து சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-y_1}{\mu}=\frac{z-z_1}{\nu}$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியையும், செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும் காண்போம் (படம் 24). செங்குத்துக் கோட்டின் அடியை Q எனக் கொள்வோம்.



படம் 24.

Q ஆனது

$$(x_1+\lambda k,\ y_1+\mu k,\ z_1+\nu k)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இப்பொழுது PQ-ன் திசை விகிதங்கள்

$$x_0-x_1-\lambda k,\ y_0-y_1-\mu k,\ z_0-z_1-\nu k$$

ஆகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டின் திசை விகிதங்கள் λ, μ, ν என்றிருப்பதாலும், இக் கோட்டுக்கு PQ செங்குத்தாயுள்ளதாலும்

$$\lambda(x_0-x_1-\lambda k)+\mu(y_0-y_1-\mu k)+\nu(z_0-z_1-\nu k)=0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இதிலிருந்து k-ன் மதிப்பை

$$\frac{\lambda(x_0-x_1)+\mu(y_0-y_1)+\nu(z_0-z_1)}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$$

என்று பெற்று, அதை $(x_1+\lambda k, y_1+\mu k, z_1+\nu k)$ என்பதில் பிரதியிட Q-ன் கூறுகள் கிடைக்கின்றன.

(x_1, y_1, z_1) ஐ A எனப் பெயரிடுவோம்.

இப்பொழுது

$$PQ^2 = PA^2 - AQ^2$$

$$= \{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2\} - \{(\lambda k)^2 + (\mu k)^2 + (\nu k)^2\}$$

$$= (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)k^2$$

$$= (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - \frac{\{\lambda(x_0 - x_1) + \mu(y_0 - y_1) + \nu(z_0 - z_1)\}^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \quad \ldots \quad (38\cdot2)$$

அடுத்தபடியாகச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_1}{\lambda_1} = \frac{y - y_1}{\mu_1} = \frac{z - z_1}{\nu_1}; \quad \frac{x - x_2}{\lambda_2} = \frac{y - y_2}{\mu_2} = \frac{z - z_2}{\nu_2}$$

குறிக்கும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதாய் இருந்தால், நிகழும் விளைவைக் காண்போம். வெட்டும் புள்ளி முதல் கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகையால், அதை

$$(x_1 + \lambda_1 k_1,\ y_1 + \mu_1 k_1,\ z_1 + \nu_1 k_1) \quad \ldots \quad (38\cdot3)$$

என்றும், அது இரண்டாவது கோட்டின் மேலும் உள்ளதால், அதை

$$(x_2 + \lambda_2 k_2,\ y_2 + \mu_2 k_2,\ z_2 + \nu_2 k_2) \quad \ldots \quad (38\cdot4)$$

என்றும் எழுதலாம். ஆகவே,

$$x_1 + \lambda_1 k_1 = x_2 + \lambda_2 k_2$$
$$y_1 + \mu_1 k_1 = y_2 + \mu_2 k_2$$
$$z_1 + \nu_1 k_1 = z_2 + \nu_2 k_2$$

என்றும், அதாவது

$$\left.\begin{aligned} (x_1 - x_2) + \lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_2 &= 0 \\ (y_1 - y_2) + \mu_1 k_1 - \mu_2 k_2 &= 0 \\ (z_1 - z_2) + \nu_1 k_1 - \nu_2 k_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (38\cdot5)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இந்தக் கடைசி மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் k_1 ஐயும், k_2 ஐயும் நீக்க,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ y_1 - y_2 & \mu_1 & \mu_2 \\ z_1 - z_2 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது
$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (38\cdot6)$$

என்று கிடைக்கின்றது. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும்போது, அதாவது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு தளக்கோடுகளாக இருக்கும் போது விளைவு (38·6) ஐக் கிட்டுகிறது. இவ் விளைவின் மறுதலையை எளிதில் நிறுவலாம்.

(38·5)-ல் உள்ள ஏதாவது இரண்டு சமன்பாடுகளை k_1-க்கு விடுவித்து, அம் மதிப்பை (38·3)-ல் பிரதியிட்டு, அல்லது சமன்பாடுகள் (38·5)-ல் இரண்டில் k_2-க்கு விடுவித்து, அம் மதிப்பை (38·4)-ல் பிரதியிட்டு, கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியைக் காணலாம்.

§ 39. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு $2x+y-z+1=0$ குறிக்கும் தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளியை

$$(1+2k, \quad -2+k, \quad -1+3k) \quad \dots \quad (1)$$

என்று துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். இப் புள்ளி, வேண்டிய வெட்டுப் புள்ளியானால், இப் புள்ளி தளத்தின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்ய வேண்டும். எனவே,

$$2(1+2k)+1(-2+k)-1(-1+3k)+1=0$$

அதாவது $(4+1-3)k+(2-2+1+1)=0.$

அதாவது $2k+2=0$

அதாவது $k=-1.$

இம் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட, வெட்டும் புள்ளி

$$(-1, \; -3, \; -4)$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 2. புள்ளி $A\ (2,\ -1,\ 3)$-லிருந்து, திசை விகிதங்கள் 2, 2, 1 நிர்ணயிக்கும் திசையில் சென்று, தளம் $x+2y-z-2=0$ஐச் சந்தித்தால், சென்ற தூரம் எவ்வளவு ?

தளத்தில் P என்ற புள்ளியில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். AP-ன் திசை விகிதங்கள்

$$2,\ 2,\ 1.$$

ஆகையால், P ஐ

$$(2+2k,\ -1+2k,\ 3+k)$$

என்று எழுதலாம். இக் கூறுகள் $x+2y-z-2=0$ ஐத் திருப்தி செய்யுமாகையால்,

$$(2+2k)+2(-1+2k)-(3+k)-2=0.$$

அதாவது $k=1$.

எனவே, $P\equiv(4,\ 1,\ 4)$.

ஆகவே, $AP=\sqrt{(4-2)^2+(1+1)^2+(4-3)^2}$
$=3$.

கணக்கு 3. புள்ளி $A\ (5,\ 7,\ 0)$-லிருந்து, சமன்பாடு $2x+3y-z-3=0$ குறிக்கும் தளத்துக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடியைக் காண்க.

செங்குத்துக் கோட்டின் அடியை N எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் AN-ன் திசை விகிதங்கள்

$$2,\ 3,\ -1$$

ஆகும். ஆகவே, N ஆனது

$$(5+2k,\ 7+3k,\ 0-k)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். ஆனால் N-ன் கூறுகள் தளத்தின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். ஆகவே,

$$2(5+2k)+3(7+3k)-(-k)-3=0$$

அதாவது, $k=-2$.

எனவே, $N\equiv(1,\ 1,\ 2)$.

கணக்கு 4. புள்ளி $P\ (1,\ 3,\ 4)$-லிருந்து, சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-14}{4}=z+3$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும், சமன்பாடுகளையும் காண்க.

செங்குத்துக் கோட்டின் அடியை N எனக் கொள்வோம். $(5, 14, -3)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி. ஆகவே N ஐ

$$(5+3k,\ 14+4k,\ -3+k)$$

என்று எழுதலாம். இப்பொழுது NP-ன் திசை விகிதங்கள்

$$(5+3k)-1,\ (14+4k)-3,\ (-3+k)-1$$

அதாவது, $4+3k,\ 11+4k,\ -4+k$

ஆகும். ஆனால், கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$3,\ 4,\ 1$$

ஆகும். ஆகவே செங்குத்துத் தன்மையால்,

$$3(4+3k)+4(11+4k)+1(-4+k)=0$$

அல்லது $26k+52=0$

அல்லது $k=-2$

என்று பெறுகிறோம், ஆகவே

$$N \equiv (-1,\ 6,\ -5)$$

$$PN = \sqrt{(1+1)^2+(3-6)^2+(1+5)^2}$$

$$=7.$$

PN-ன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-6}{3-6}=\frac{2+5}{1+5}$$

அதாவது $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z+5}{6}$

ஆகும்.

கணக்கு 5. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{1},\ \frac{x-5}{2}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-7}{2}$$

குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியைக் காண்க.

முதலில் (38·6) ஐப் பயன்படுத்துவோம். இங்கு அணிக் கோவை (determinant) ஆனது

$$\begin{vmatrix} 2-5 & 4-8 & 4-7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

ஆகும். இதன் மதிப்பு பூச்சியம் என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகள் எனக் கிடைக்கின்றது. கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை முதல் கோட்டின் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$(2+k_1,\ 4+2k_1,\ 4+k_1)$$

என்றும், இரண்டாம் கோட்டின் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$(5+2k_2,\ 8+3k_2,\ 7+2k_2)$$

என்றும் எழுதலாம். ஆகவே,

$$\left.\begin{aligned} 2+k_1 &= 5+2k_2 \\ 4+2k_1 &= 8+3k_2 \\ 4+k_1 &= 7+2k_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

அதாவது $k_1 - 2k_2 - 3 = 0,$

$$2k_1 - 3k_2 - 4 = 0,$$

$$k_1 - 2k_2 - 3 = 0.$$

இவற்றிலிருந்து கிடைப்பதாவது :

$$k_2 = -1, \quad k_2 = -2$$

வெட்டுப் புள்ளி : (1, 2, 3).

முதலில் செய்தவாறு அணிக்கோவையை எழுதி அதன் மதிப்பைப் பூச்சியம் என்று காட்டாமலேயே, (1)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் மூன்றையும் $k_1 = -1$, $k_2 = -2$ என்ற மதிப்புகள் திருப்தி செய்கின்றன எனக் காட்டிக் கோடுகளின் ஒரு தளத் தன்மையை நிறுவவும் செய்யலாம்.

கணக்கு 6. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda_1} = \frac{y-y_1}{\mu_1} = \frac{z-z_1}{\nu_1}$$

குறிக்கும் l_1 என்ற கோடும்,

சமன்பாடுகள்

$$a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1=0,\ a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2=0$$

குறிக்கும் l_2 என்ற கோடும் ஒரு தளக் கோடுகளாவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

l_1-ன் மேலுள்ள புள்ளிகளை

$$(x_1+\lambda_1 k,\ y_1+\mu_1 k,\ z_1+\nu_1 k)$$

என்ற துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். இங்கு k-ன் வெவ்வேறு மதிப்புக்களுக்கு, l_1-ன்மீதுள்ள வெவ்வேறு புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன. இப் புள்ளிகளில் ஒன்று l_2 மேல் அமைந்தால், அப் புள்ளியின் கூறுகள் l_2-ன் சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும். ஆகவே,

$$a_1(x_1+\lambda_1 k)+b_1(y_1+\mu_1 k)+c_1(z_1+\nu_1 k)+d_1=0$$

$$a_2(x_1+\lambda_1 k)+b_2(y_1+\mu_1 k)+c_2(z_1+\nu_1 k)+d_2=0$$

இவற்றிலிருந்து,

$$k=-\frac{a_1 x_1+b_1 y_1+c_1 z_1+d_1}{a_1\lambda_1+b_1\mu_1+c_1\nu_1}$$

மேலும், $$k=-\frac{a_2 x_1+b_2 y_1+c_2 z_1+d_2}{a_2\lambda_1+b_2\mu_1+c_2\nu_1}$$

என்றும் பெறுகிறோம். ஆகவே, வேண்டிய நிபந்தனை,

$$\frac{a_1 x_1+b_1 y_1+c_1 z_1+d_1}{a_1\lambda_1+b_1\mu_1+c_1\nu_1}=\frac{a_2 x_1+b_2 y_1+c_2 z_1+d_2}{a_2\lambda_1+b_2\mu_1+c_2\nu_1}$$

என்றாகிறது.

§40. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடுகள் $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு $x+y+z-24=0$ குறிக்கும் தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(2) சமன்பாடுகள் $\frac{x+1}{2}=y+2=\frac{z-2}{2}$ குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு $2x-y-z-1=0$ குறிக்கும் தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(3) புள்ளி $(1, 2, 3)$ஐயும், புள்ளி $(3, 5, 7)$ ஐயும் சேர்க்கும் கோடு, சமன்பாடு $x+y+z-24=0$ குறிக்கும் தளத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(4) புள்ளிகள் (0, 0, 2), (1, 2, 3) வழியாகச் செல்லும் கோடு, தளம் $x-y+3=0$ ஐ வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(5) புள்ளி $(-1, 2, 0)$ வழியாகச் செல்லும் கோடு ஒன்று, சமன்பாடு $2x-y+3=0$ குறிக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இக்கோடு தளம் $x+6y+2z+1=0$ ஐ வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(6) புள்ளி (0, 1, 2) வழியாகச் செல்லும் கோடு ஒன்று, சமன்பாடுகள் $x+2y-z+1=0$, $2x-y+z+1=0$ குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளது. இக் கோடு தளம் $x+y+z+2=0$ ஐ வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(7) புள்ளி $(1, -2, 2)$-லிருந்து திசை விகிதங்கள் 2, 2, 1 நிர்ணயிக்கும் திசையில் சென்று, தளம் $x+2y-z=0$ ஐச் சந்தித்தால், சென்ற தூரம் எவ்வளவு?

(8) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-6}$$

குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணங்களின் சம வெட்டிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}$; $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$ ஆகும். கோடுகள் $A(1, 2, 3)$ வழியாகச் செல்லுகின்றன, இப் புள்ளியிலிருந்து கோடுகளின் மேல் B_1, B_2 என்ற புள்ளிகளை $AB_1=1$, $AB_2=1$ என்றிருக்குமாறு எடுத்தால்

$$B_1 \equiv \left(1+\frac{1}{3},\ 2+\frac{2}{3},\ 3-\frac{2}{3}\right),$$

$$B_2 \equiv \left(1+\frac{2}{7},\ 2+\frac{3}{7},\ 3-\frac{6}{7}\right).$$

M, $B_1 B_2$-ன் நடுப்புள்ளியானால், AM ஒரு சமவெட்டியாகும்.]

(9) புள்ளி $(-2, 7, -1)$-லிருந்து தளம் $2x-y+z=0$-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடியைக் காண்க. மேலும், இத் தளத்தைப் பொருத்த, $(-2, 7, -1)$-ன் பிம்பத்தைக் காண்க.

(10) புள்ளி (5, 7, 0)-ன், தளம் $2x+3y-z-3=0$ ஐப் பொருத்த பிம்பத்தைக் காண்க.

(11) புள்ளி A (2, −3, 3)-ன் வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் திசை விகிதங்கள் 0, 2, −1. இக் கோடு, தளம் $x-2y-z+1=0$ ஐ B-ல் வெட்டுகிறது என்றால், கீழ்க் காணும் விளைவுகளைக் காண்க :

(i) $B\equiv(2, 1, 1)$.

(ii) A-லிருந்து கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்கு வரையப் பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி $N(1, -1, 4)$.

(iii) தளத்தின் மேலுள்ள, கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் வீழலின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-3}.$$

(12) சமன்பாடுகள் $3x+4y+3=0$, $x+2y+2z-1=0$ குறிக்கும் கோட்டின், சமன்பாடு $x+2y+3z+1=0$ குறிக்கும் தளத்தின் மேலுள்ள வீழலின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : வீழல், தளம் $x+2y+3z+1=0$-ல் அமைகிறது. மேலும் கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் வழியாகச் செல்லுமாறும், தளம் $x+2y+3z+1=0$-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளவாறும் உள்ள தளத்திலும் அமைகிறது. ஆகவே, இவ்விரு தளங்களின் சமன்பாடுகளாகிய,

$$x+2y+3z+1=0,\quad x+y-z+2=0$$

என்பவை வீழலின் சமன்பாடுகள்.]

(13) புள்ளி (3, 0, 5)-லிருந்து, சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-8}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-2}$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(14) புள்ளி (4, 6, 2)-லிருந்து, சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{2}=z$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(15) புள்ளி (3, 0, 5)-லிருந்து, சமன்பாடுகள்

$$x-2y+2z-4=0, \quad x+3z-11=0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(16) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$$

குறிக்கும் கோடுகள், சமதளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியையும், அவை அமைக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(17) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-10}{3}=\frac{z-13}{4}, \quad \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-7}{3}$$

குறிக்கும் கோடுகள், சமதளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியையும், அவை அமைக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(18) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-a}{a'}=\frac{y-b}{b'}=\frac{z-c}{c'}, \quad \frac{x-a'}{a}=\frac{y-b'}{b}=\frac{z-c'}{c}$$

குறிக்கும் கோடுகள், ஒருதளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியையும் காண்க.

(19) சமன்பாடுகள்

$$x=a_1z+b_1,\ y=cz+d_1;\quad x=a_2z+b_2,\ y=c_2z+d_2$$

குறிக்கும் கோடுகள், ஒரு தளக் கோடுகளானால்,

$$(a_1-a_2)(d_1-d_2)=(b_1-b_2)(c_1-c_2)$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-b_1}{a_1}=\frac{y-d_1}{c_1}=Z, \quad \frac{x-b_2}{a_2}=\frac{y-d_2}{c_2}=z$$

என்று எழுதலாம்.]

(20) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+6}{-3}$$

குறிக்கும் கோடும், தளங்கள்

$x+2y+z+2=0$, $4x+5y+3z+6=0$ இரண்டும் வெட்டும் கோடும் ஒரு தளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட கோடு, கொடுக்கப் பட்ட தளங்களை வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரே புள்ளியாகும் எனக் காட்டுக.]

(21) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

குறிக்கும் கோடும், சமன்பாடுகள்

$x-2y+2z-3=0$, $x-4y+5z-8=0$ குறிக்கும் கோடும், ஒரு தளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும், கோடுகள் அமைக்கும் தளத்தையும் காண்க.

விடைகள்

(1) (5, 8, 11) (2) (5, 1, 8) (3) (5, 8, 11)

(4) (3, 6, 5) (5) (5, −1, 0)

(6) $\left(\frac{5}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{-11}{7}\right)$ (7) 3

(8) $\frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{23} = \frac{z-3}{-32}$ (9) (2, 5, 1), (6, 3, 3)

(10) (−3, −5, 4) (13) 3 (14) $\sqrt{6}$ 15. 3

(16) (4, 4, 4) (17) (1, 1, 1,) $x-2y+z=0$

(18) $(a+a'\ b+b',\ c+c')$ (20) $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -7\right)$

(21) (1, 2, 3), $x-z+2=0$

§41. இரு கோடுகளின் ஒருதளத் தன்மை (Coplanarity of two lines)

சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda_1}=\frac{y-y_1}{\mu_1}=\frac{z-z_1}{\nu_1}$$

$$\frac{x-x_2}{\lambda_2}=\frac{y-y_2}{\mu_2}=\frac{z-z_2}{\nu_2}$$

குறிக்கும் இரு கோடுகள் ஒரு தளத்தில் அமைந்தால், அணிக்கோவை

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}$$

பூச்சியமாகும் என்று, புள்ளியின் துணையலகுக் குறிப்பிடல் முறையின் மூலம், (38·6)-ல் கண்டோம். இங்கு வேறொரு முறையில் இதே விளைவைக் காண்போம்.

முதற் கோட்டுக்கு l_1 என்றும், இரண்டாவது கோட்டுக்கு l_2 என்றும் பெயரிடுவோம். முதலில் l_1 வழியாகச் செல்லும், l_2-க்கு இணையான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இத் தளம் l_1 வழியாகச் செல்லுவதால், புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே, இத் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \quad \ldots \quad (41\cdot1)$$

என்று எழுதலாம். இங்குத் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்,

$$a, b, c$$

ஆகும். இத் தளத்தில் l_1 அமைந்துள்ளதால், l_1, தளத்தின் செங்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. ஆகவே,

$$a\lambda_1+b\mu_1+c\nu_1=0. \quad \ldots \quad (41\cdot2)$$

மேலும் இத் தளம், l_2-க்கு இணையாக உள்ளது. ஆகவே, இத் தளத்தின் செங்கோடு, l_2-க்கும் செங்குத்தாக உள்ளது.

எனவே,

$$a\lambda_2+b\mu_2+c\nu_2=0. \quad \ldots \quad (41\cdot3)$$

(41·1), (41·2), (41·3) ஆகியவற்றிலிருந்து a, b, c முதலியவற்றை நீக்க, இத் தளத்தின் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (41\cdot4)$$

என்றாகிறது.

இங்குக் குறிப்பாக (x_2, y_2, z_2) இத் தளத்தில் அமைந்தால், l_2 முழுவதுமே இத் தளத்தில் அமையும். அதாவது l_1,-ம், l_2-ம் ஒரே தளத்தில் அமையும். இந் நிலையில் சமன்பாடு $(41\cdot4)$ ஐ, புள்ளி (x_2, y_2, z_2) திருப்தி செய்யும். எனவே, இந் நிலையில், அதாவது l_1, l_2, ஒருதளக் கோடுகளாக இருக்கும்போது,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. மேலும், கோடுகள் உண்டாக்கும் தளத்தின் சமன்பாடு, $(41\cdot4)$ என்று கிடைக்கிறது.

§ 42. இரு கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள மிகச்சிறு தூரம்: (Shortest distance between two lines)

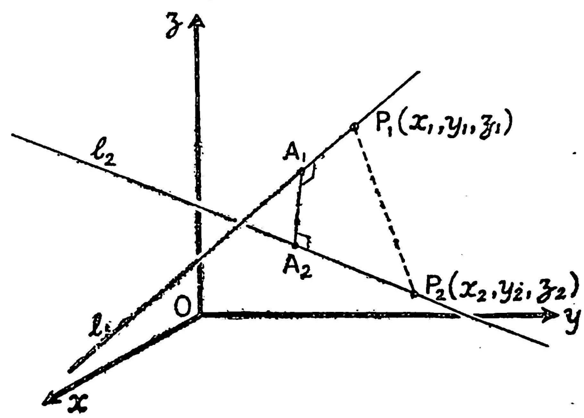
இங்குச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda} = \frac{y-y_1}{\mu_1} = \frac{z-z_1}{\nu_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\lambda_2} = \frac{y-y_2}{\mu_2} = \frac{z-z_2}{\nu_2}$$

குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மிகச்சிறு தூரத்தைக் காண்போம். இக் கோடுகளில் முதற் கோட்டுக்கு l_1 என்ற பெயரும், இரண்டாவது கோட்டுக்கு l_2 என்ற பெயரும் இடுவோம் (படம் 25). மேலும், புள்ளிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) இரண்டுக்கும் P_1, P_2 என்ற பெயர் இடுவோம். இப்பொழுது A_1, A_2, முறையே, l_1, l_2 மீதுள்ள புள்ளிகளாயிருந்து, A_1 A_2

ஆனது, l_1-க்கும், l_2-க்கும் இடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரமானால், $A_1 A_2$ ஆனது l_1-க்கும் l_2-க்கும் செங்குத்தாக இருக்கும்.



படம் 25.

முதலில் $A_1 A_2$-ன் திசை விகிதங்களைக் காண்போம். இதற்காக இதன் திசைக் கொசைன்களை,

$$l, m, n$$

எனக் கொள்வோம். $A_1 A_2$, l_1-க்கும், l_2-க்கும் செங்குத்தாக உள்ளதால்,

$$\lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n = 0,$$
$$\lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n = 0.$$

இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}} = \frac{-m}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \nu_2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix}}$$

என்று கிடைக்கிறது. அதாவது,

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}} = \frac{m}{\begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{n}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix}}$$

என்று கிடைக்கின்றது. எனவே, பகுதிகளிலுள்ள அணிக் கோவைகள் $A_1 A_2$-ன் திசை விகிதங்களாகின்றன. இத் திசை விகிதங்களை λ, μ, ν எனக் குறிப்போம்.

அப்படியாயின்,

$$l=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},\quad m=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},$$

$$n=\frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}.$$

இப்பொழுது A_1 ஐயும், A_2 ஐயும் இணைக்கும் கோட்டின் மேலுள்ள $P_1 P_2$-ன் வீழல்தான் $A_1 A_2$ என்பது. ஆகவே,

$$A_1 A_2 = |\, l(x_1-x_2)+m(y_1-y_2)+n(z_1-z_2)\,|$$

என்று § 21-ல் உள்ள கணக்கு 5-ன் மூலம் அறிகிறோம். எனவே,

$$A_1 A_2 = \frac{|\, (x_1-x_2)\lambda+(y_1-y_2)\mu+(z_1-z_2)\nu\,|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}.$$

இம் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்டவாறு அணிக்கோவையின் வடிவில் எழுதலாம் :

$A_1A_2 =$

$$=\left|\frac{(x_1-x_2)\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}-(y_1-y_2)\begin{vmatrix}\lambda_1 & \nu_1\\ \lambda_2 & \nu_2\end{vmatrix}+(z_1-z_2)\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_2 & \mu_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\nu_1 & \lambda_1\\ \nu_2 & \lambda_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_2 & \mu_2\end{vmatrix}^2}}\right|$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ \mu_2 & \nu_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\nu_1 & \lambda_1\\ \nu_2 & \lambda_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\lambda_1 & \mu_1\\ \lambda_2 & \mu_2\end{vmatrix}^2}} \quad \ldots(42\cdot1)$$

அடுத்தபடியாக, கோடு A_1A_2-ன் சமன்பாடுகளைக் காண்போம். A_1A_2 ஆனது, $P_1\,A_1A_2$ என்ற தளமும், $P_2\,A_2A_1$ என்ற தளமும் வெட்டும் கோடாகும். ஆகவே, A_1A_2-ன் சமன்பாடுகள், இத் தளங்களின் சமன்பாடுகளாகும். ஆகவே, இப்பொழுது இத் தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண முற்படுவோம்.

தளம் $P_1\,A_1A_2$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. அதனால் அதன் சமன்பாட்டை

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \quad \ldots \quad (42\cdot2)$$

என்று எழுதலாம். இங்கு a, b, c என்பன தளத்தின் செங் கோட்டின் திசை விகிதங்கள். இப்பொழுது A_1P_1, A_1A_2 என்ற இரண்டு கோடுகளுமே இத் தளத்தில் அமைந்துள்ளன. ஆகவே, இவை தளத்தின் செங்கோட்டுக்குச் செங்குத்தானவை. ஆனால், இவற்றின் திசை விகிதங்கள்

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \quad \lambda, \mu, \nu$$

ஆகும். ஆகவே,

$$a\lambda_1 + b\mu_1 + c\nu_1 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (42{\cdot}3)$$

$$a\lambda \;\; + b\mu \;\; + c\nu \;\; = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (42{\cdot}4)$$

(42·2), (42·3), (42·4) ஆகிய மூன்று விளைவுகளிலிருந்தும் a, b, c ஆகியவற்றை நீக்க, தளம் $P_1A_1A_2$-ன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

என்றாகிறது. இது போலவே $P_2A_2A_1$ என்ற தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

என்றாகிறது. ஆகவே, இவ்விரு சமன்பாடுகளும், கோடு A_1A_2-ன் சமன்பாடுகளாகின்றன.

§ 43. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{2}, \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-7}{2}$$

குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. கோடுகள் அமைக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

அணிக்கோவை

$$\begin{vmatrix} 2-5 & 4-8 & 4-7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

இவற்றின் மதிப்பைப் பூச்சியம் எனக் காணலாம். ஆகவே, கோடுகள் ஒருதளக் கோடுகளாகின்றன. கோடுகளை அமைக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டை, § 40 மூலம்

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது

$$x - z + 2 = 0$$

என்று அறிகிறோம்.

கணக்கு 2. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-34}{-10}, \quad \frac{x+6}{4} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-7}{-2}$$

குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மிகச்சிறு தூரத்தைக் காண்க. இம் மிகச்சிறு தூரத்தைக் கொடுக்கும், கோடுகளின் பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிகளை A_1, A_2 எனக் கொள்வோம். $A_1 A_2$ ஐக் காண, (42·1) ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

இங்கு,

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+6 & -6-7 & 34-7 \\ 2 & 3 & -10 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-36) + 13(36) + 27(-18)$$

$$= -162$$

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 30 = -36$$

$$\begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -40+4 = -36$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6-12 = -18.$$

ஆகவே,

$$A_1 A_2 = \frac{|-162|}{\sqrt{(-36^2+(-36)^2+(-18)^2}} = \frac{162}{18\times 3} = 3.$$

§ 42-ன் மூலம் கோடு $A_1 A_2$-ன் சமன்பாடுகள்

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+6 & z-34 \\ 2 & 3 & -10 \\ -36 & -36 & -18 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-7 & z-7 \\ 4 & -3 & -2 \\ -36 & -36 & -18 \end{vmatrix} = 0$$

என்று அறிகிறோம். இச் சமன்பாடுகள்

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+6 & z-34 \\ 2 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x+6 & y-7 & z-7 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

என்று சுருங்குகின்றன.

கணக்கு 3. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-34}{-10}, \quad \frac{x+6}{4} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-7}{-2}$$

குறிக்கும் கோடுகளின் பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிகள் A_1, A_2 இரண்டையும் காண்க. A_1A_2 ஐயும் கணக்கிடுக.

A_1 ஐயும், A_2 ஐயும் துணையலகுக் குறியீட்டு முறையில்

$$(-2+2k_1,\ -6+3k_1,\ 34-10k_1),$$

$$(-6+4k_2,\ \ 7-3k_2,\ \ 7-2k_2)$$

என்று எழுதலாம்.

இப்பொழுது A_1A_2-ன் திசை விகிதங்கள்,

$$(-2+2k_1)-(-6+4k_2),$$
$$(-6+3k_1)-(7-3k_2),$$
$$(34-10k_1)-(7-2k_2)$$

அதாவது $\quad 4+2k_1-4k_2,\ -13+3k_1+3k_2,\ 27-10k_1+2k_2$

என்பனவாகும். முதற்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$2,\ 3,\ -10.$$

A_1A_2 இக் கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது ஆகையால்,

$$2(4+2k_1-4k_2)+3(-13+3k_1+3k_2)$$
$$-10(27-10k_1+2k_2)=0.$$

இதேபோல் இரண்டாவது கோட்டிலிருந்து

$$4(4+2k_1-4k_2)-3(-13+3k_1+3k_2)$$
$$-2(27-10k_1+2k_2)=0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் k_1-க்கும், k_2-க்கும் விடுவிக்க

$$k_1=3,\quad k_2=2$$

என்று கிடைக்கின்றது, இதனால் A_1, A_2 இரண்டும்

$$(4,\ 3,\ 4),\quad (2,\ 1,\ 3)$$

என்றாகின்றன, மேலும்

$$A_1A_2=\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(4-3)^2}$$
$$=3.$$

§ 44. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{2},\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$$

குறிக்கும் கோடுகள் ஒருதளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. இக் கோடுகள் உருவாக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(2) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-10}{3}=\frac{z-13}{4},\ \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-7}{3}$$

குறிக்கும் கோடுகள் ஒருதளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. இக் கோடுகள் உருவாக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(3) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-a}{a'}=\frac{y-b}{b'}=\frac{z-c}{c'},\quad \frac{x-a'}{a}=\frac{y-b'}{b}=\frac{z-c'}{c}$$

குறிக்கும் கோடுகள் ஒருதளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. இக் கோடுகள் உருவாக்கும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0$$

எனக் காட்டுக.

(4) சமன்பாடுகள்

$$3x-y-z+2=0,\quad x-2y+3z-6=0$$

குறிக்கும் கோடும், சமன்பாடுகள்

$$3x-4y+3z-4=0,\ 2x-2y+z-1=0$$

குறிக்கும் கோடும், ஒருதளக் கோடுகள் எனக் காட்டுக. இக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும், இக் கோடுகள் அமைக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(5) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4},\quad \frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$$

குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரத்தைக் காண்க. இம் மிகச் சிறு தூரத்தைக் கொடுக்கும், கோடுகளின் பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

(6) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-6}{-2},\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

குறிக்கும் கோடுகளின் பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிகளைக் காண்க. செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தையும் காண்க.

(7) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-6}{-4}=z-9$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கும், சமன்பாடுகள்

$$2x-2y+z-3=0,\quad 2x-y+2z-9=0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரத்தைக் காண்க.

(8) சமன்பாடுகள்

$$x+3y+z-4=0, \quad x-2y+2z-1=0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கும், சமன்பாடுகள்

$$x+3y+z-23=0, \; x-5y-z+23=0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரத்தைக் காண்க.

(9) சமன்பாடுகள்

$$y+z=0, \; z+x=0, \; x+y=0, \; x+y+z=a$$

குறிக்கும் தளங்கள் உருவாக்கும் நான்முகியின் ஒவ்வொரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களுக்கிடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரமும் $\frac{2a}{\sqrt{6}}$ எனக் காட்டுக.

(10) சமன்பாடுகள்

$$y+z=0, \; z+x=0, \; x+y=0, \; x+y+z=a$$

குறிக்கும் தளங்கள் உருவாக்கும் நான்முகியின் ஒவ்வொரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்களுக்கும் வரையப்பட்ட பொதுச் செங்கோடு, புள்ளி $(-a, -a, -a)$ வழியாகச் செல்லுகிறது எனக் காட்டுக.

(11) ஒரு பக்கத்தை a ஆக உடைய கன சதுரத்தின் மூலை விட்டத்திற்கும், இம் மூலை விட்டத்தை வெட்டாத ஒரு பக்கத்திற்கும் இடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரம், $\frac{a}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

(12) ஒரு செவ்வக இணைகரத் திண்மத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் a, b, c. இத் திண்மத்தின் ஒரு மூலை விட்டத்திற்கும், இம் மூலை விட்டத்தை வெட்டாத பக்கங்களுக்கும் இடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரங்கள்

$$\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}, \; \frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}, \; \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

எனக் காட்டுக.

(13) z அச்சுக்கும், சமன்பாடுகள்

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0,\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கும், இடையிலுள்ள மிகச் சிறு தூரத்தை

$$\frac{|c_1 d_2 - c_2 d_1|}{\sqrt{(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2}}$$

எனக் காட்டுக.

(14) ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து, இரு கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளையும் வெட்டுமாறு ஒரே ஒரு கோடுதான் வரைய முடியும் என்று காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு, இவ்விரண்டின் வழியாகச் செல்லும் தளமும், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி, கொடுக்கப்பட்ட மற்றொரு கோடு இரண்டின் வழியாகச் செல்லும் தளமும் வெட்டும் கோடுதான் வேண்டிய கோடு.]

விடைகள்

(1) $x - 2y + z = 0$ (2) $x - 2y + z = 0$

(4) $(1, 2, 3)$, $x - z + 2 = 0$

(5) $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $11x + 2y - 7z + 6 = 0$, $7x + y - 5z + 7 = 0$

(6) $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 1)$, 3 (7) 7 (8) 6.

§ 45. மூன்று தளங்கள், ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகளின் தன்மை

இங்குச் சமன்பாடுகள்

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (45{\cdot}1)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (45{\cdot}2)$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (45{\cdot}3)$$

குறிக்கும் தளங்கள் π_1, π_2, π_3 வெட்டும் கோடுகளைப் பற்றிப் படிப்போம். π_2, π_3 தளங்கள் வெட்டும் கோட்டை l_{23} என்றும், π_3, π_1 தளங்கள் வெட்டும் கோட்டை l_{31} என்றும், π_1, π_2 தளங்கள் வெட்டும் கோட்டை l_{12} என்றும் குறிப்போம்.

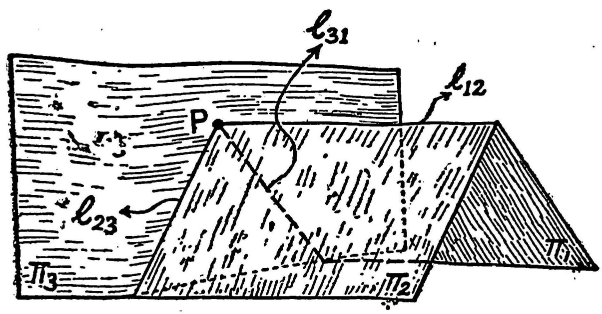
இப்பொழுது l_{23}, l_{31}, l_{12} மூன்றின் தன்மையைக் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தலாம் :

(i) l_{12}, π_3-க்கு இணையாக இல்லாமல் இருக்கும்.

(ii) l_{12}, π_3-க்கு இணையாக இருக்கும்.

இங்கு, l_{12}-ன் ஒரு புள்ளியும் π_3-ல் அமையாது. அல்லது l_{12} முழுவதுமே π_3-ல் அமையும்

வகை (i) : இவ்வகையில் l_{12}, π_3ஐ ஒரு புள்ளியில் வெட்டும் (படம் 26). இப் புள்ளிக்கு P எனப் பெயரிடுவோம். இப் புள்ளி வழியாக l_{12}, l_{23}, l_{31} மூன்றுமே செல்லும்.



படம் 26.

l-ன் திசை விகிதங்கள்,

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

என்று (35·8)-ல் கண்டோம். தளம் π_3-ன் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$a_3, \; b_3, \; c_3.$$

இங்குத் தளம் π_3-ன் செங்கோடு, l_{12}-க்குச் செங்குத்தாக இல்லை.

ஆகவே,

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

அதாவது
$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

அதாவது
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

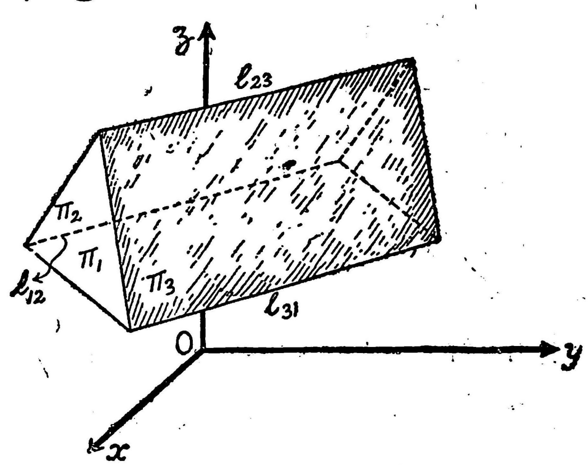
எனவே,
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

என்றிருந்தால் l_{12}, l_{23}, l_{31} மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றன என்று கிடைக்கின்றது.

வகை (ii): இவ்வகையில் l_{12}, π_3-ன் செங்கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

மேலும், இவ்வகையில் இரண்டு பிரிவுகள் உள்ளன என்பதை முன்பே கூறினோம். ஒன்று, l_{12}-ன் ஒரு புள்ளியும் π_3-ல்



படம் 27.

அமையாது. மற்றொன்று, l_{12} முழுவதுமே π_3-ல் அமையும். இவற்றில் முதலாவது பிரிவை முதலில் எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 27).

$$\left[\frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ 0\right]$$

என்ற புள்ளி l_{12} மேலுள்ள ஒரு புள்ளி என (35·5)-ல் கண்டோம். இங்கு இப் புள்ளியின் கூறுகள் π_3-ன் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யா, எனவே,

$$(a_3)\frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} - (b_3)\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + (d_3) \pm 0$$

அதாவது $a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_3 \end{vmatrix} \pm 0.$

அதாவது $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} \pm 0.$

அதாவது $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \pm 0.$

ஆகவே, முடிவில்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \pm 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது l_{12}, π_3 ஐ எப் புள்ளியிலும் வெட்டவில்லை. ஆனால் l_{31}, π_3-ல் உள்ள ஒரு கோடாகும். ஆகவே, l_{12}, l_{31} ஐ வெட்டாது. ஆனால், l_{12}-ம், l_{31}-ம் π-ல் உள்ள ஒரு தளக் கோடுகள். ஆகவே, l_{12}, l_{31} இரண்டும் இணை

கோடுகள், இதுபோலவே l_{12}, l_{23} இரண்டும் இணைகோடுகள். ஆகவே, l_{12}, l_{23}, l_{31} என்பன தனித் தனியாக அமைந்துள்ள மூன்று இணைகோடுகள் என்று தெரிகிறது.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

என்றிருந்தால், l_{12}, முழுவதுமே π_3-ன் மேல் அமைகின்றது. அதாவது π_3, l_{12} வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆனால், π_2, π_3 இரண்டும் வெட்டும் கோடு, l_{12}. அதாவது π_1-ம், π_2-ம், l_{12} வழியாகச் செல்லுகின்றன. ஆகவே π_1, π_2, π_3 மூன்றுமே l_{12} வழியாகச் செல்லுகின்றன. இங்கு l_{12}, l_{23}, l_{31} மூன்றும் ஒன்றுடன் ஒன்று இணைந்த கோடுகளாகின்றன.

ஆகவே, முடிவில் கீழ்க்கண்ட விளைவுகள் கிடைக்கின்றன :

(i) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

என்றால் தளங்கள் வெட்டும் மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும். இப்புள்ளி மூன்று தளங்களுக்கும் பொதுப் புள்ளியாகும்.

(ii) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

என்றால் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை.

(iii) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

என்றால் மூன்று கோடுகளும் ஒன்றோடு ஒன்று இணைந்த கோடுகளாகும். மூன்று தளங்களும் இக்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன.

§46. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடுகள்

$$x+y+2z-2=0,\ 2x-y+z-1=0,\ x+2y-z-3=0$$

குறிக்கும் தளங்கள், ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகள், ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக.

(2) சமன்பாடுகள்

$$3x-y-z-1=0,\ x+y+z-3=0,\ 2x+2y+z-4=0$$

குறிக்கும் தளங்கள், ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகள், ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக.

(3) சமன்பாடுகள்

$$x-y+z-1=0,\quad x+y-3z+1=0,\quad x-2y+3z-3=0$$

குறிக்கும் தளங்கள், ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகள், இணையான கோடுகள் எனக் காட்டுக.

(4) சமன்பாடுகள்

$$2x-3y+4z-5=0,\quad 2x+3y-8z-4=0,$$
$$4x+3y-10z-8=0$$

குறிக்கும் தளங்கள், ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோடுகள், இணையான கோடுகள் எனக் காட்டுக.

(5) சமன்பாடுகள்

$$x-y+z-1=0,\ x+y-3z+1=0,\ x-2y+3z-2=0$$

குறிக்கும் தளங்கள் மூன்றும், ஒரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக.

(6) சமன்பாடுகள்

$$x+2y+3z+1=0,\ 2x-y+z+1=0,\ x+12y+13z+3=0$$

குறிக்கும் தளங்கள் மூன்றும், ஒரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக.

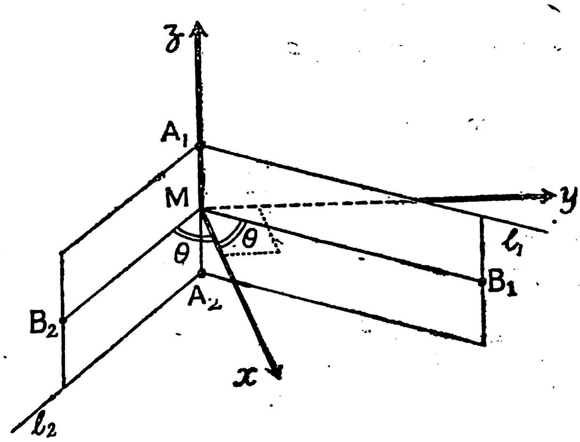
(7) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ என்றால் சமன்பாடுகள் $ax+hy+gz=0,\ hx+by+cz=0,\ gx+fy+cz=0$ குறிக்கும் தளங்கள் மூன்றும், ஒரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக.

(8) $al + bm + cn = 0$ என்றால் சமன்பாடுகள் $bx - ay = n$, $cy - bz = l$, $az - cx = m$ குறிக்கும் தளங்கள் மூன்றும், ஒரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக.

(9) $a^2 + b^2 + c^2 + 2\,abc - 1 = 0$ என்றால், சமன்பாடுகள் $x = cy + bz$, $y = az + cx$, $z = bx + ay$ குறிக்கும் தளங்கள் மூன்றும் ஒரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுக.

§47. இரண்டு வெட்டாக் கோடுகளின் எளிய சமன்பாடுகள்

l_1, l_2 என்பன இரண்டு வெட்டாக் கோடுகள். இக் கோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிகள் A_1, A_2 (படம் 28). A_1A_2-ன் மையப் புள்ளியை M என்று குறிப்போம். MB_1 ஐ l_1-க்கு இணையாகவும், MB_2 ஐ l_2-க்கு



படம் 28.

இணையாகவும் வரைக. மேலும், கோணம் B_2MB_1-ன் உட் சமவெட்டி My ஐயும் படத்தில் உள்ளவாறு வரைக. MA_1 ஐ z-க்கு நீட்டுக.

$$Mx, My, Mz$$

என்பன, ஒன்றுக்கொன்றுச் செங்குத்தான மூன்று கோடுகள். இக் கோடுகளை முறையே x, y, z அச்சுகளாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது $A_1A_2 = 2c$ என்றால்

$$A_1 \equiv (0, 0, c), \quad A_2 \equiv (0, 0, -c).$$

மேலும் l_1-க்கும், l_2-க்கும் இடையிலுள்ள கோணம் 2θ என்ருல், அதாவது கோணம் $B_2 MB_1 = 2\theta$ என்ருல், MB_1 ஆனது x, y, z அச்சுகளுடன் முறையே,

$$\theta, \; 90° - \theta, \; 90°$$

என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. ஆனுல், MB_1, l_1-க்கு இணையானது. ஆகவே, l_1-ம் x, y, z அச்சுகளுடன் முறையே

$$\theta, \; 90° - \theta, \; 90°$$

என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. ஆகவே l_1-ன் திசை விகிதங்கள்

$$\cos\theta, \; \cos(90° - \theta), \; \cos 90°$$

அதாவது $\cos\theta, \; \sin\theta, \; 0$

ஆகும். மேலும் l_1, $A_1(0, 0, c)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே, l_1-ன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-0}{\cos\theta} = \frac{y-0}{\sin\theta} = \frac{z-c}{0} \quad \cdots \quad (47{\cdot}1)$$

ஆகும். இச் சமன்பாடுகளை,

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{\tan\theta} = \frac{z-c}{0}$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். இங்கு $\tan\theta$ ஐ, m எனக் குறித்தால், இச் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{m} = \frac{z-c}{0} \quad \cdots \quad (47{\cdot}2)$$

என்று எளிய வடிவில் எழுதலாம்.

MB_2 ஆனது x, y, z அச்சுகளுடன் முறையே

$$\theta, \; 90° + \theta, \; 90°$$

என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. ஆனுல், MB_2, l_2-க்கு இணையானது. ஆகவே l_2-ம், x, y, z அச்சுகளுடன் முறையே

$$\theta, \; 90° + \theta, \; 90°$$

என்ற கோணங்களை உண்டாக்குகிறது. ஆகவே, l_2-ன் திசை விகிதங்கள்

$$\cos\theta, \; \cos(90° + \theta), \; \cos 90°$$

அதாவது $\cos\theta, \; -\sin\theta, \; 0$

ஆகும். மேலும் l_2, $A_2(0, 0, -c)$ வழியாகச் செல்லுகிறது.

ஆகவே, l_2-ன் சன்பாடுகள்

$$\frac{x-0}{\cos\theta}=\frac{y-0}{-\sin\theta}=\frac{z+c}{0} \quad \ldots \quad (47\cdot3)$$

ஆகும். இச் சமன்பாடுகளை,

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{-\tan\theta}=\frac{z+c}{0}$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். ஆனால் $\tan\theta = m$.

ஆகவே, இச் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-m}=\frac{z+c}{0} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (47\cdot4)$$

என்று எளிய வடிவில் எழுதலாம்.

l_1-ன் சமன்பாடுகளை

$$y-mx=0,\ z-c=0$$

என்றும், l_2–ன் சமன்பாடுகளை

$$y+mx=0,\ z+c=0$$

என்றும் எழுதலாம் என்பதை (47·2)-லிருந்தும், (47·4)-லிருந்தும் காணலாம். மேலும், சமன்பாடுகள் (47·2) ஐயும், (47·4) ஐயும்

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{m}=\frac{z-c}{0}=k_1$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-m}=\frac{z+c}{0}=k_2$$

என எழுதி, l_1-ன் மேலுள்ள புள்ளியையும், l_2-ன் மேலுள்ள புள்ளியையும், துணையலகுக் குறியீட்டு முறையில்

$$(k_1,\ k_1 m,\ c),\quad (k_2,\ -k_2 m,\ -c) \quad \ldots \quad (47\cdot5)$$

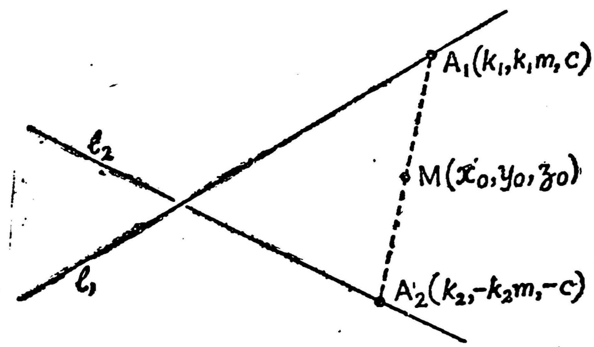
என்று எழுதலாம் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

§48. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. l_1, l_2 என்பன நிலைத்த கோடுகள். A_1 என்பது l_1 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A_2 என்பது l_2 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. $A_1 A_2$ ஆனது, ஒரு நிலைத்த தளத்திற்கு இணையாக இருக்குமாறு, A_1, A_2 இரண்டும் நகர்ந்தால், $A_1 B_2$-ன் மையப் புள்ளி M-ன் இயங்குவரை, ஒரு நேர்கோடு எனக் காட்டுக (படம் 29).

l_1-ன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{m} = \frac{z-c}{0}$$



படம் 29.

என்றிருக்குமாறும், l_2-ன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-m} = \frac{z+c}{0}$$

என்றிருக்குமாறும், x, y, z அச்சுகளைத் தேர்ந்தெடுப்போம். இங்கு m, c இரண்டும், l_1, l_2 சார்ந்த மாறிலிகள். இப்பொழுது A_1 ஐயும், A_2 ஐயும்

$$(k_1, k_1\, m, c), (k_2, -k_2\, m, -c)$$

என்று துணையலகுக் குறியீட்டு முறையில் எழுதலாம். இங்கு k_1, k_2 இரண்டும் துணையலகுகள். இவை A_1, A_2 இரண்டின் இடங்களுக்கொப்ப மாறுகின்றன.

$A_1\, A_2$ ஆனது, எப்பொழுதும் ஒரு நிலைத்த தளத்துக்கு இணையாக உள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, A_1, A_2, இத் தளத்தின் செங்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. தளத்தின் சமன்பாட்டை,

$$px + qy + rz + s = 0$$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$p, q, r$$

என்பனவாகும். இப்பொழுது $A_1\, A_2$-ன் திசை விகிதங்கள்

$$k_1 - k_2,\ m(k_1 + k_2),\ 2c$$

ஆகும்.

ஆகவே,

$$p(k_1-k_2)+qm(k_1-k_2)+2rc=0 \quad \cdots \quad (1)$$

என்று கிடைக்கின்றது.

இப்பொழுது A_1, A_2-ன் மையப் புள்ளியை $M(x_0, y_0, z_0)$ எனக் கொண்டால்,

$$x_0=\frac{k_1+k_2}{2},\ y_0=\frac{m(k_1-k_2)}{2},\ z_0=0$$

என்றும், அதாவது

$$\left.\begin{aligned} k_1+k_2 &= 2x_0 \\ k_1-k_2 &= \frac{2y_0}{m} \\ 0 &= z_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது (1)-லிருந்தும், (2)-லிருந்தும், k_1 ஐயும், k_2 ஐயும் நீக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$p\left(\frac{2y_0}{m}\right)+qm(2x_0)+2rc=0,\quad z_0=0.$$

அதாவது $2qm^2x_0+2py_0+2rcm=0,\quad z_0=0.$

ஆகவே, (x_0, y_0, z_9)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடுகள்

$$2qm^2x+2py+2rc=0,\quad z=0$$

என்றுகின்றன. இச் சமன்பாடுகள், இரு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகையால், இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடாகிறது.

கணக்கு 2. l_1, l_2 என்பன இரண்டு நிலைத்த கோடுகள். A_1 என்பது l_1 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A_2 என்பது l_2 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A_1A_2 ஆனது மாறிலி d-க்குச் சமமாக இருக்குமாறு, A_1, A_2-ன் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l_1-ன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{m}=\frac{z-c}{0}$$

என்றிருக்குமாறும், l_2-ன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-m}=\frac{z+c}{0}$$

என்றிருக்குமாறும், x, y, z அச்சுகளைத் தேர்ந்தெடுப்போம். இங்கு m, c இரண்டும் l_1, l_2 சார்ந்த மாறிலிகள். இப்பொழுது A_1 ஐயும், A_2 ஐயும்

$$(k_1, k_1 m, c), (k_2, -k_2 m, -c)$$

என்று துணையலகுக் குறியீட்டு முறையில் எழுதலாம். இங்கு k_1, k_2 இரண்டும் துணையலகுகள், இவை A_1 A_2 இரண்டின் இடங்களுக்கொப்ப மாறுகின்றன.

A_1A_2 ஆனது, எப்பொழுதும் மாறிலி d-க்குச் சமமாக உள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே,

$$(k_1 - k_2)^2 + m^2 (k_1 + k_2)^2 + 4c = d^2 \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது A_1A_2-ன் மையப் புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொண்டால்,

$$x_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad y_0 = \frac{m(k_1 - k_2)}{2}, \quad z_0 = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆகவே,

$$\left. \begin{aligned} k_1 + k_2 &= 2x_0 \\ k_1 - k_2 &= \frac{2y_0}{m} \\ 0 &= z_0 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-லிருந்தும், (2)-லிருந்தும், k_1 ஐயும், k_2 ஐயும் நீக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\left(\frac{2y_0}{m}\right)^2 + m^2 (2x_0)^2 + 4c^2 = d^2, \quad z_0 = 0$$

அதாவது,

$$4m^4 x_0^2 + 4y_0^2 = m^2 (d^2 - 4c^2), \; z_0 = 0$$

அதாவது $$\frac{4m^2}{d^2 - 4c^2} x_0^2 + \frac{4}{m^2 (d^2 - 4c^2)} y_0^2 = 1, \; z_0 = 0.$$

ஆகவே, (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{4m^2}{d^2 - 4c^2} x^2 + \frac{4}{m^2 (d^2 - 4c^2)} y^2 = 1, \; z = 0$$

என்றுகின்றன. இச் சமன்பாடுகள், தளம் $z=0$-யிலுள்ள ஒரு நீள் வளைவைக் (ellipse) குறிக்கின்றன.

கணக்கு 3. P என்பது ஒரு நகரும் புள்ளி. சமன்பாடுகள்

$$y-mx=0, \; z-c=0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு, P-லிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி A_1. சமன்பாடுகள்

$$y+mx=0, \; z+c=0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு, P-லிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி A_2. $OP=A_1A_2$ என்றால், P-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு O என்பது ஆதி.

P ஐ (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். A_1 ஐயும், A_2 ஐயும்

$$(k_1, k_1 m, c), (k_2, -k_2 m. -c)$$

என்று துணையலகு வடிவத்தில் எழுதலாம் என்பதை அறிவோம். P, இடம் மாறும்போது k_1, k_2 ஆகிய இரண்டும் மாறுகின்றன என்பதும் அறிவோம்.

முதற்கோட்டின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{m} = \frac{z-c}{0}$$

என்ற சமச்சீர் வடிவில் எழுதலாம். ஆகவே, இக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$1, m, 0$$

ஆகும். PA_1,-ன் திசை விகிதங்கள்

$$x_0-k_1, \; y_0-k_1 m, \; z_0-c.$$

ஆனால் PA_1, முதற் கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே,

$$1\,(x_0-k_1) + m\,(y_0-k_1 m) + 0\,(z_0-c) = 0$$

அதாவது $\quad k_1(1+m^2) = x_0 + my_0$

அதாவது $$k_1 = \frac{x_0+my_0}{1+m^2}. \qquad \ldots \qquad (1)$$

இதேபோல் இரண்டாவது கோட்டின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-m} = \frac{z-c}{0}$$

என்று எழுதி, அதன் விகிதங்களை

$$1, \; -m, \; 0$$

என்று அறிகிறோம்.

PA_2-ன் திசை விகிதங்கள்

$$x_0-k_2, \quad y_0+k_2 m, \quad z_0+c$$

ஆகும். PA_2, இரண்டாவது கோட்டுக்குச் செங்குத்தானதால்,

$$1\,(x_0-k_2)-m(y_0+k_2 m)+0\,(z_0+c)=0$$

அதாவது $\quad k_2\,(1+m^2)=x_0-my_0$

அதாவது $\quad k_2=\dfrac{x_0-my_0}{1+m^2}$ . ... (2)

ஆனால், $\quad OP=A_1\,A_2$ அதாவது $OP^2=A_1\,A_2{}^2$.

ஆகவே, $\quad x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=(k_1-k_2)^2+m^2(k_1+k_2)^2 + 4c^2.$ ... (3)

இப்பொழுது (1), (2), (3) முதலியவற்றிலிருந்து k_1, k_2 இரண்டையும் நீக்கவேண்டும். இதற்காக (1) ஐயும், (2) ஐயும் பயன்படுத்தி (k_1+k_2) ஐயும், (k_1-k_2) ஐயும் பெற்றால்

$$k_1+k_2=\frac{2x_0}{1+m_2}$$

$$k_1-k_2=\frac{2my_0}{1+m^2}$$

என்று கிடைக்கின்றது. இம் மதிப்புகளை (3)-ல் பிரதியிட்டால், கிடைப்பதாவது :

$$x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=\left(\frac{2my_0}{1+m^2}\right)^2+m^2\left(\frac{2x_0}{1+m^2}\right)^2+4c^2$$

அதாவது $\quad (x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)\,(1+m^2)^2=4\,m^2\,y_0{}^2+4\,m^2\,x_0{}^2 + 4\,c^2\,(1+m^2)^2$

அதாவது $\quad (x_0{}^2+y_0{}^2)\,(1+m^2)^2-(x_0{}^2+y_0{}^2)\,(4m^2) = (4\,c^2-z_0{}^2)\,(1+m^2)^2$

அதாவது $\quad (x_0{}^2+y_0{}^2)\;\{(1+m^2)^2-4\,m^2\}=(4\,c^2-z_0{}^2)\,(1+m^2)^2$

அதாவது $\quad (1-m^2)^2\,(x_0{}^2+y_0{}^2)=(1+m^2)^2\,(4\,c^2-z_0{}^2).$

ஆகவே, P–ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$(1-m^2)^2\,(x^2+y^2)=(1+m^2)^2\,(4\,c^2-z^2)$$

என்றாகிறது.

§ 49 பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) l_1, l_2 என்பன இரண்டு நிலைத்த செங்குத்தான கோடுகள். A_1 என்பது l_1 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A_2 என்பது l_2 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. $A_1 A_2$ ஆனது மாறிலி d-க்குச் சமமாக இருக்குமாறு, A_1, A_2 இரண்டும் நகர்ந்தால், $A_1 A_2$-ன் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : § 48-ல் கணக்கு 2-ல் $m = \tan 45° = 1$. ஏனெனில் l_1, l_2 ஆகிய இரண்டும் செங்குத்துக் கோடுகள்.]

(2) l_1, l_2 என்பன இரண்டு நிலைத்த கோடுகள். A_1 என்பது l_1 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. A_2 என்பது l_2 மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. $A_1 A_2$ ஆனது z அச்சுடன் ஒரு மாறிலிக் கோணத்தை உண்டாக்கினால், $A_1 A_2$-ன் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு நீள் வளைவு என்று காட்டுக.

(3) P என்பது ஒரு நகரும் புள்ளி. சமன்பாடுகள்

$$y - mx = 0, \; z - c = 0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு, P-லிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி A_1. சமன்பாடுகள்

$$y + mx = 0, \; z + c = 0$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு, P-லிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி A_2.

(i) கோணம் $A_1 P A_2$, ஒரு செங்கோணமாக இருக்குமாறு P நகர்ந்தால், P-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) கோணம் $A_1 O A_2$ ஒரு செங்கோணமாக இருக்குமாறு P நகர்ந்தால், P-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு O என்பது ஆதி.

(iii) $A_1 A_2$, மாறிலி d-க்குச் சமமாக இருக்குமாறு P நகர்ந்தால், P-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(iv) $PA_1 = PA_2$ என்றிருக்குமாறு, P நகர்ந்தால், P-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்.

விடைகள்

(3) (i) $x^2 \dfrac{m^2(m^2-1)}{(m^2+1)^2} + \dfrac{(1-m^2)}{(m^2+1)^2} y^2 + c^2 - c^2 = 0$

(ii) $(1-m^2)(x^2-m^2y^2-c^2)(1+m^2)^2 = 0$

(iii) $4m^2(x^2+y^2)+(4c^2-d^2)(1+m^2)^2 = 0$

(iv) $mxy + cz(1+m^2) = 0.$

5. வரை பரப்பு

§ **50. வரை பரப்பு :** ஒரு நகரும் நேர்கோடு உருவாக்கும் பரப்பு, வரை பரப்பு என்று வழங்கப்படுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நிலைத்த வளைவை (curve) வெட்டுமாறு நகரும் ஒரு கோடு, ஒரு கூம்பை (cone) உருவாக்குகின்றது. இங்கு நிலைத்த புள்ளி, கூம்பின் உச்சி என்றும், நிலைத்த வளைவு, கூம்பின் பிறப்பிக்கும் வளைவு (generating curve) என்றும் வழங்கப்படுகின்றன. ஒரு நிலைத்த வளைவை வெட்டிக் கொண்டே, ஒரு குறிப்பிட்ட திசைக்கு இணையாக இருக்குமாறு நகரும் ஒரு கோடு, ஓர் உருளையை (cylinder) உருவாக்குகின்றது. இங்கு நிலைத்த வளைவு, உருளையின் பிறப்பிக்கும் வளைவு என்று வழங்கப்படுகின்றது.

l என்ற ஒரு கோடு, ஒரு வரை பரப்பை உண்டாக்குகிறது எனக் கொள்வோம். l, தனது வெவ்வேறு நிலைகளில் l_1, l_2, l_3 ... என்ற கோடுகளுடன் இணைந்திருக்கும் என்றும் கொள்வோம். அப்படியாயின் l_1, l_2, l_3 ... என்பன வரை பரப்பின் பிறப்பிகள் (generators) என்று வழங்கப்படுகின்றன.

இப்பொழுது, சமன்பாடு $f(x, y) = 0$ குறிக்கும் பரப்பைக் காண்போம். இச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் $x = x_1$, $y = y_1$ என்ற மதிப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது,

$$f(x_1, y_1) = 0$$

என்றுள்ளவாறு, x_1 ஐயும், y_1 ஐயும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது,

$$(x, y, \lambda)$$

என்ற புள்ளியின் கூறுகள், சமன்பாடு $f(x, y) = 0$ ஐத் திருப்தி செய்கின்றன என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, (x_1, y_1, λ)

என்ற புள்ளி, பரப்பு $f(x, y) = 0$ மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். ஆனால் λ, பல மதிப்புகளைப் பெறும்போது,

$$(x_1, y_1, \lambda)$$

பல புள்ளிகளைக் குறிக்கும். இப் புள்ளிகள் அனைத்தும் xOy தளத்திலுள்ள $(x_1, y_1, 0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும், z அச்சுக்கு இணையான கோட்டில் அமைகின்றன. ஆனால் இப் புள்ளிகள், பரப்பு $f(x, y) = 0$ மேல் உள்ள புள்ளிகள். ஆகவே, $(x, y, 0)$ வழியாகச் செல்லும், z அச்சுக்கு இணையான கோடு, பரப்பு $f(x, y) = 0$ மேல் அமைகிறது. அதாவது, சமன்பாடு $f(x, y) = 0$, குறிக்கும் பரப்பு. அதன் பிறப்பிகள், z அச்சுக்கு இணையானவை.

இப் பரப்பை xOy தளம் வெட்டும் வளைவை, சமன்பாடுகள் $f(x, y) = 0$, $z=0$ குறிக்கின்றன என்பதை எளிதில் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, சமன்பாடு $x^2+y^2-a^2 = 0$ ஓர் உருளையைக் குறிக்கின்றது. சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 - x^2 = 0, \quad z = 0,$$

தளம் xOy-ல் உள்ள ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றன. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad z = 0,$$

தளம் xOy-ல் உள்ள ஒரு நீள் வளைவைக் குறிக்கின்றன. இதே போல் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad z = k,$$

இரண்டும், சமன்பாடு $z = k$ குறிக்கும் தளத்திலுள்ள ஒரு நீள் வளைவைக் குறிக்கின்றன.

§51. ஒரு வரை பரப்பின் சமன்பாடு காணல்

ஒரு வரை பரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்பதற்கு, வரை பரப்பின் பிறப்பி ஒன்றை எடுத்துக் கொண்டு அதன் திசை விகிதங்களை

$$\lambda, \mu, \nu$$

என்று கொள்ள வேண்டும். மேலும், பிறப்பியின்மீதுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) என்று எடுத்துக் கொண்டு,

பிறப்பியின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}$$

என்று எழுதி, இச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, x_0, y_0, z_0 மற்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிலிகள் சார்ந்த தொடர்பு ஒன்றைக் கண்டு, பின் தொடர்பிலுள்ள x_0, y_0, z_0 ஆகியவற்றை x, y, z ஆக மாற்ற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, சமன்பாடுகள்

$$y=b,\ z=-c,\ z=c,\ x=-a,\ x=a,\ y=-b$$

குறிக்கும் கோடுகள் மூன்றையுமே வெட்டிக்கொண்டே நகரும் கோட்டின் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டை இப்பொழுது காண் போம்.

நகரும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$\lambda,\ \mu,\ \nu$$

எனக் கொள்வோம். மேலும், இக் கோட்டின்மீது ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு, அதை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu} \qquad \ldots \qquad (51\cdot1)$$

ஆகும். இக்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$y=b, \quad z=-c \qquad \ldots \qquad (51\cdot2)$$

குறிக்கும் கோட்டை வெட்டுகிறது. இவ்வெட்டுப் புள்ளி, கோடு (51·1)-ன் மேல் உள்ளதால், இதை,

$$(x_0+\lambda k,\ y_0+\mu k,\ z_0+\nu k)$$

எனக் கொள்வோம். இப் புள்ளி, கோடு (51·2)-ன் மேலும் உள்ளதால்,

$$y_0+\mu k=b, \quad z_0+\nu k=-c.$$

இவை இரண்டிலிருந்தும் k-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு, அவற்றைச் சமன்படுத்த,

$$\frac{b-y_0}{\mu}=\frac{-c-z_0}{\nu} \qquad \ldots \qquad (51\cdot3)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இதுவே கோடு (51·1) ஆனது, கோடு (51·2) ஐ வெட்டுவதற்கான நிபந்தனையாகும்.

இதேபோல்கோடு (51·1) ஆனது, சமன்பாடுகள்

$$z=c, \ x=-a$$

குறிக்கும் கோட்டை வெட்டுவதற்கான நிபந்தனையை,

$$z_0+\nu k_1=c, \quad x_0+\lambda k_1=-a$$

என்பவற்றிலிருந்து k_1 ஐ நீக்கி

$$\frac{c-z_0}{\nu}=\frac{-a-x_0}{\lambda} \qquad \ldots \ (51\cdot4)$$

என்று பெறுகிறோம். மேலும், கோடு (51·1) ஆனது, சமன்பாடுகள்

$$x=a, \ y=-b$$

கோட்டை வெட்டுவதற்கான நிபந்தனையை

$$x_0+\lambda k_2=a, \quad y_0+\mu k_2=-b$$

என்பவற்றிலிருந்து k_2 ஐ நீக்கி

$$\frac{a-x_0}{\lambda}=\frac{-b-y_0}{\mu} \qquad \ldots \ (51\cdot5)$$

என்று பெறுகிறோம்.

இப்பொழுது (51·3), (51·4), (51·5) ஆகிய மூன்றிலிருந்தும் λ, μ, ν ஆகியவற்றை நீக்கி x_0, y_0, z_0 மற்றும் மாறிலிகள் a, b, c முதலியன சார்ந்த ஒரு தொடர்பைக் காணவேண்டும். இதற்காக (51·3), (51·4), (51·5) மூன்றையும் கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி எழுதவேண்டும் :

$$(z_0+c)\,\mu-(y_0-b)\,\nu=0,$$
$$(x_0+a)\,\nu-(z_0-c)\,\lambda=0,$$
$$(y_0+b)\,\lambda-(x_0-a)\,\mu=0.$$

அதாவது
$$(0)\,\lambda+(z_0+c)\,\mu-(y_0-b)\,\nu=0,$$
$$-(z_0-c)\,\lambda+(0)\,\mu+(x_0+a)\,\nu=0,$$
$$(y_0+b)\,\lambda-(x_0-a)\,\mu+(0)\,\nu=0.$$

இவற்றிலிருந்து λ, μ, ν ஆகியவற்றை நீக்க,

$$\begin{vmatrix} 0 & z_0+c & -(y_0-b) \\ -(z-c) & 0 & (x_0+a) \\ (y_0+b) & -(x_0-a) & 0 \end{vmatrix}=0$$

என்றும், இதிலிருந்து வேண்டிய வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 0 & z+c & -(y-b) \\ -(z-c) & 0 & (x+a) \\ (y+b) & -(x-a) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

என்றும் அறிகிறோம். இச் சமன்பாடு

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0$$

என்று சுருங்குகிறது.

§ 52. மாதிரிக் கணக்கு

கணக்கு: ஒரு நகரும் கோடு, சமன்பாடுகள் $x-y=0$, $z=0$ குறிக்கும் கோட்டை வெட்டிக் கொண்டேயும், சமன்பாடுகள் $x^2-2az=0$, $y=0$ குறிக்கும் பரவளைவை வெட்டிக் கொண்டேயும், சமன்பாடு $x+y=0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு இணையாக இருக்குமாறும் நகருகிறது. இக் கோடு பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நகரும் கோட்டின் திசை விகிதங்களை

$$\lambda, \mu, \nu$$

எனக் கொள்வோம். மேலும் இக்கோட்டின்மீது ஏதாவது ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு, அதை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_0}{\lambda} = \frac{y-y_0}{\mu} = \frac{z-z_0}{\nu} \qquad \dots (1)$$

ஆகும். இப்பொழுது இக் கோடு, சமன்பாடுகள்

$$a-y=0, \quad z=0 \qquad \dots (2)$$

குறிக்கும் கோட்டை வெட்டுகிறது. வெட்டும் புள்ளி கோடு (1)-ன் மேல் உள்ளதால், அதை

$$(x_0-\lambda k, \;\; y_0+\mu k, \;\; z_0+\nu k)$$

என்று குறிக்கலாம். இப் புள்ளி, கோடு (2)-ன் மேலும் உள்ளதால்

$$(x_0+\lambda k)-(y_0+\mu k)=0, \; z_0+\nu k=0$$

என்றும், இவற்றிலிருந்து k ஐ நீக்க

$$\left(x_0-\frac{\lambda z_0}{\nu}\right)-\left(y_0-\frac{\mu z_0}{\nu}\right)=0 \qquad \dots (3)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இதுவே, கோடு (1), கோடு (2) ஐ வெட்டுவதற்கான நிபந்தனையாகும். இதே போல் கோடு (1), சமன்பாடுகள்

$$x^2 - 2az = 0,\ y = 0$$

குறிக்கும் பரவளைவை வெட்டுவதற்கான நிபந்தனையை,

$$(x_0 + \lambda k_1)^2 - 2a(z_0 + \nu k_1) = 0,\ y_0 + \mu k_1 = 0$$

ஆகியவற்றிலிருந்து k_1 ஐ நீக்கிப் பெறவேண்டும். இங்கு

$$k_1 = -\frac{y_0}{\mu}.$$

ஆகவே, நிபந்தனை

$$\left(x_0 - \frac{\lambda y_0}{\mu}\right)^2 - 2a\left(z_0 - \frac{\nu y_0}{\mu}\right) = 0$$

அதாவது $(\mu x_0 - \lambda y_0)^2 - 2a\mu(\mu z_0 - \nu y_0) = 0$ ... (4)
என்றுகிறது.

மேலும் கோடு (1)-ன் திசை விகிதங்கள்

$$\lambda,\ \mu,\ \nu$$

இக் கோடு, சமன்பாடு $x + y = 0$ குறிக்கும் தளத்துக்கு இணையானது. ஆனால், இத் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$1,\ 1,\ 0$$

ஆகும். இச் செங்கோட்டுக்கு கோடு (1) செங்குத்தாக இருக்கும். ஆகவே,

$$(1)\lambda + (1)\mu + (0)\nu = 0$$

அதாவது,

$$\lambda + \mu = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இப்பொழுது (3), (4), (5) மூன்றிலிருந்தும் λ, μ, ν ஆகியவற்றை நீக்க வேண்டும். இதற்காக (3) ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்:

$$(\nu x_0 - \lambda z_0) - (\nu y_0 - \mu z_0) = 0$$

அதாவது,

$$(z_0)\lambda + (-z_0)\mu - (x_0 - y_0)\nu = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

இப்பொழுது (5)-லிருந்தும், (6)-லிருந்தும் கிடைப்பதாவது

$$\frac{\lambda}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -z_0 & -(x_0-y_0) \end{vmatrix}} = \frac{-\mu}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z_0 & -(x_0-y_0) \end{vmatrix}} = \frac{\nu}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_0 & -z_0 \end{vmatrix}}$$

அதாவது,

$$\frac{\lambda}{-(x_0-y_0)} = \frac{-\mu}{-(x_0-y_0)} = \frac{\nu}{-z_0-z_0}$$

அதாவது,

$$\frac{\lambda}{x_0-y_0} = \frac{\mu}{-(x_0-y_0)} = \frac{\nu}{2z_0}$$

இதிலுள்ள மூன்று கோவைகளையும் s-க்குச் சமன்படுத்த,

$$\lambda = (x_0-y_0)s$$
$$\mu = -(x_0-y_0)s$$
$$\nu = 2z_0 s$$

என்று கிடைக்கிறது. இம்மதிப்புகளை (4)-ல் பிரதியிடக் கீழ்க் கண்டவாறு கிடைக்கின்றது :

$$[-(x_0-y_0)sx_0-(x_0-y_0)sy_0]^2 + 2a(x_0-y_0)s[-(x_0-y_0)sz_0-2z_0 sy_0] = 0$$

அதாவது,

$$[(x_0-y)x_0+(x_0-y_0)y_0]^2 - 2a(x_0-y_0)[(x_0-y_0)z_0+2z_0 y_0] = 0$$

அதாவது $(x_0-y_0)^2(x_0+y_0)^2 - 2a(x_0-y_0)z_0(x_0+y_0) = 0$

அதாவது $(x_0-y_0)(x_0+y_0) - 2az_0 = 0$

அதாவது $x^2_0 - y^2_0 - 2az_0 = 0.$

ஆகவே, வேண்டிய வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 2az = 0$$

என்றாகிறது.

§ 53. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) ஒரு நகரும் நேர்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$x = 1,\ y = -1;\ y = 1,\ z = -1;\ z = 1,\ x = -1$$

குறிக்கும் கோடுகள் மூன்றையும் வெட்டிக்கொண்டே நகர்கின்றது. இந் நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(2) ஒரு நகரும் நேர்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$y = 0,\ z = c;\quad x = 0,\ z = -c$$

குறிக்கும் கோடுகள் இரண்டையும் வெட்டிக் கொண்டே சமன்பாடு $lx + my + nz = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு இணையாக இருக்குமாறு நகர்கிறது. இந் நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) ஒரு நகரும் நேர்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$y - mx = 0,\ z - c = 0\ ;\ y + mx = 0,\ z + c = 0,$$

குறிக்கும் கோடுகள் இரண்டையும் வெட்டிக் கொண்டே சமன்பாடுகள் $y - mx = 0$, $z - c = 0$ குறிக்கும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு நகர்கின்றது. இந் நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(4) ஒரு நகரும் நேர்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$y - mx = 0,\ z - c = 0\ ;\ y + mx = 0,\ z + c = 0$$

குறிக்கும் கோடுகள் இரண்டையும் வெட்டிக் கொண்டும், இக் கோடுகளுடன் சம கோணங்களை உண்டாக்கிக் கொண்டும் நகர்கின்றது. இந் நேர்கோட்டின் வரை பரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(5) ஒரு நகரும் நேர்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$x = 0,\ z + a = 0\ ;\ y = 0,\ z - a = 0$$

குறிக்கும் கோடுகளையும், சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,\ z = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தையும் வெட்டிக் கொண்டே நகர்கின்றது. இந் நேர்கோட்டின் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(6) ஒரு நகரும் நேர்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$xy - c^2 = 0,\ z = 0\ ;\ y^2 - 4\,cz = 0,\ x = 0$$

குறிக்கும் செவ்வக அதிபரவளைவையும், பரவளைவையும் வெட்டிக்கொண்டே, zOx தளத்திற்கு இணையாக இருக்குமாறு நகர்கின்றது. இந் நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(7) x அச்சின் வழியாகச் சென்று கொண்டே சுழலும் தளம் ஒன்று, y அச்சின் வழியாகச் சென்று கொண்டே சுழலும் தளம் ஒன்றுடன் மாறுத கோணம் α-வை உண்டாக்குகிறது. இத் தளங்களின் வெட்டுக் கோடு பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$z^2 (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 y^2 \tan^2 \alpha$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : x அச்சின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டை $y + \lambda z = 0$ எனவும், y அச்சின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டை $x + \mu z = 0$ எனவும் கொள்க. இத் தளங்களின் செங்கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்

$$0,\ 1,\ \lambda;\quad 1,\ 0,\ \mu$$

ஆகும்.

ஆகவே, $\cos^2\alpha = \dfrac{\{(0)(1) + (1)(0) + (\lambda)(\mu)\}^2}{(0^2 + 1^2 + \lambda^2)(1^2 + 0^2 + \mu^2)}$.

பரப்பின்மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி (x_0, y_0, z_0) என்றால்,

$$y_0 + \lambda z_0 = 0, \quad x_0 + \mu z_0 = 0$$

அல்லது $\lambda = -\dfrac{y_0}{z_0}, \mu = -\dfrac{x_0}{z_0}$.

λ, μ இரண்டையும் நீக்கி, x_0, y_0, z_0 ஆகியவற்றில் ஒரு தொடர்பைக் காண்க.]

(8) λ-ன் மதிப்பு தொடர்ந்து மாறினால், சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right),\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

குறிக்கும் கோட்டின் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(9) $A_1 A_2$ என்பது l நீளமுள்ள ஒரு கோல், A_1, சமன்பாடுகள்

$$y - mx = 0,\ z - c = 0$$

குறிக்கும் கோட்டின் மீதும், A_2, சமன்பாடுகள்

$$y + mx = 0,\ z + c = 0$$

குறிக்கும் கோட்டின் மீதும் ஊருமாறு, $A_1 A_2$ நகர்கின்றது. $A_1 A_2$ பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : A_1 ஐ (k_1, mk_1, c) எனவும், A_2 ஐ $(k_2, -m k_2, -c)$ என்றும், $A_1 A_2$ மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) எனவும் கொள்க. இப்பொழுது

$$l^2 = (k_1 - k_2)^2 + m^2 (k_1 + k_2)^2 + 4 c^2.$$

A_1 P-ம், A_2 P-ம் இணையானவையாகையால், A_1 P-ன் திசை விகிதங்களும், A_2 P-ன் திசை விகிதங்களும் கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கும் :

$$\frac{x_0-k_1}{x_0-k_2} = \frac{y_0-mk_1}{y_0+mk_2} = \frac{z_0-c}{z_0+c}$$

k_1 ஐயும், k_2 ஐயும் நீக்கி. x_0, y_0, z_0, m, c, l ஆகியவற்றில் ஒரு தொடர்பைக் காண்க.]

விடைகள்

(1) $xy + yz + zx + 1 = 0$

(2) $lx(z-c) + my(z+c) + n(z^2 - c^2) = 0$

(3) $(1+m^2)(y+mx)(z-c) = (1-m^2)(z+c)(y-mx)$

(4) $mxz = cy$ அல்லது $yz = mcx$

(5) $\dfrac{x^2}{(z+a)^2} + \dfrac{y^2}{(z-a)^2} = \dfrac{r^2}{a^2}$

(6) $(xy - c^2)y^2 - 4c^3 z = 0$

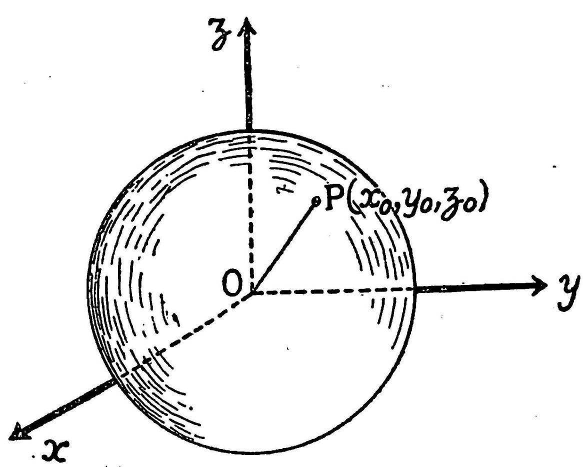
(8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

(9) $4c^2(mxz - cy)^2 + 4m^2c^2(yz - mcx)^2$
$+ m^2(4c^2 - l^2)(z^2 - c^2)^2 = 0.$

6. கோளங்கள்

§54. ஒரு கோளத்தின் சமன்பாடு

முதலில், ஆதியை மையமாகவும், ஆரத்தை a ஆகவும் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.



படம் 30.

$P(x_0, y_0, z_0)$ என்பது கோளத்தின் மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்றால்,

$$OP = a$$

ஆகும் (படம் 30). ஆதாவது,

$$OP^2 = a^2$$

அதாவது,

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2$$

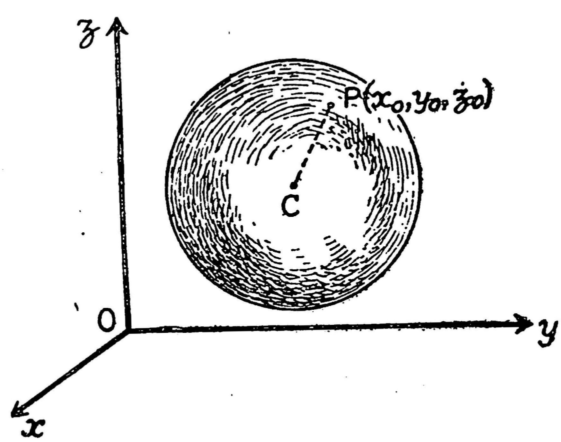
ஆகும்.

இதிலிருந்து கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (54\cdot1)$$

என்று கிடைக்கின்றது.

அடுத்தபடியாக, $C(a, b, c)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், r ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்



படம் 31.

போம். $P(x_0, y_0, z_0)$ என்பது கோளத்தின் மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்றால்

$$CP=r$$

ஆகும் (படம் 31). அதாவது,

$$CP^2=r^2$$

அதாவது,

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=r^2$$

ஆகும். இதிலிருந்து கோளத்தின் சமன்பாடு

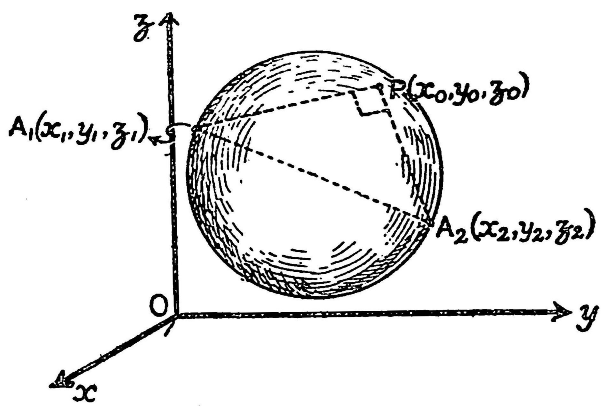
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \ldots \quad (54\cdot2)$$

என்று கிடைக்கின்றது.

கடைசியாக, புள்ளி $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ஐயும், புள்ளி $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோட்டுத் துண்டை விட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 32).

கோளத்தின் மேலுள்ள $P(x_0, y_0, z_0)$ என்று ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\angle A_1 P A_2 = 90°.$$



படம் 32.

ஆகும். அதாவது, PA_1, PA_2-க்குச் செங்குத்தானதாக இருக்கும். ஆனால், PA_1, PA_2 இரண்டின் திசை விகிதங்கள்

$$x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1;\quad x_0 - x_2,\ y_0 - y_2,\ z_0 - z_2$$

ஆகும். ஆகவே,

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (y_0 - y_1)(y_0 - y_2) + (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) = 0$$

இதிலிருந்து கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

என்று அடைகிறோம்.

§ 55. ஒரு கோளத்தின் திட்டமான சமன்பாடு (Standard equation of a sphere)

சமன்பாடு (54·2) ஐ விரித்தெழுதினால், அது

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by + 2cz + (a^2 + b^2 + c^2 - r^2) = 0$$

என்ற வடிவம் பெறுகிறது. இதிலிருந்து, ஒரு கோளத்தின் சமன்பாடு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாய் இருக்கும் என்றும், இச் சமன்பாட்டில், x^2, y^2, z^2 ஆகியவற்றின் குணகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்கும் என்றும், yz, zx, xy ஆகியவற்றின் குணகங்கள் பூச்சியமாய் இருக்கும் என்றும் தெரிகிறது.

ஒரு கோளத்தின் சமன்பாட்டில், x^2, y^2, z^2 ஆகியவற்றின் குணகங்கள் 1-க்குச் சமமானால், சமன்பாட்டைக் கோளத்தின் திட்டமான சமன்பாடு (Standard equation) என்கிறோம்.

ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின், x^2, y^2, z^2 ஆகியவற்றின் குணகங்கள் சமமாகவும், yz, zx, xy ஆகியவற்றின் குணகங்கள் பூச்சியமாகவும் இருந்தால், சமன்பாடு ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கின்றன என இப்பொழுது காட்டுவோம். இதற்காக,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \qquad \dots \quad (55 \cdot 1)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். இச் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம் :

$$(x^2 + 2\,ux) + (y^2 + 2\,vy) + (z + 2\,wz) + d = 0$$

அதாவது $(x+u)^2 + (y+v)^2 + (z+w)^2 + d - u^2 - v^2 - w^2 = 0$

அதாவது $(x+u)^2 + (y+v)^2 + (z+w)^2$

$$= (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d^2})^2.$$

இச் சமன்பாட்டை, சமன்பாடு (54·2) உடன் ஒப்பிட, இச் சமன்பாடு, அதாவது சமன்பாடு (55·1), ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கின்றது எனவும், அக் கோளத்தின் மையம்

$$(-u, \ -v, \ -w)$$

ஆகும் என்றும், கோளத்தின் ஆரம்

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$$

ஆகும் என்றும் அறிகிறோம். மேலும், $u^2 + v^2 + w^2 - d$ மிகையாகவோ, அல்லது பூச்சியமாகவோ அல்லது குறையாகவோ இருப்பதைப் பொறுத்து, சமன்பாடு (55·1), முறையே ஒரு மெய்க் கோளத்தையோ அல்லது ஒரு புள்ளிக் கோளத்தையோ அல்லது ஒரு கற்பனைக் கோளத்தையோ குறிக்கும் எனத் தெரிகிறது.

சமன்பாடு (55·1)-லிருந்து, ஒரு கோளத்தின் சமன்பாட்டில், ஒன்றையொன்று சாராத மாறிலிகள் உள்ளன என்று தெரிகின்றது.

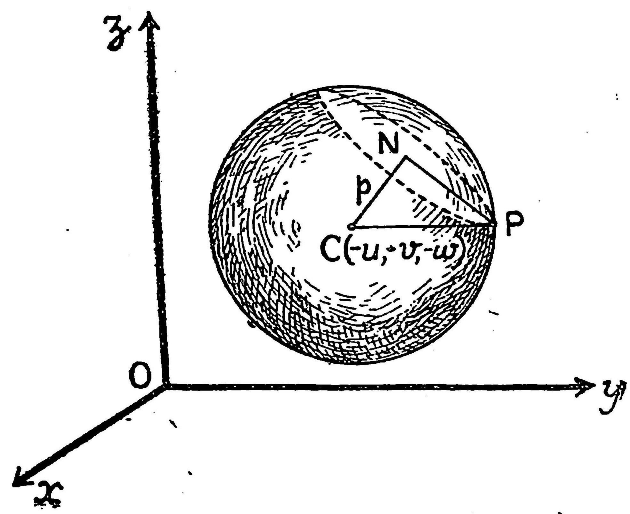
§ 56. ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

ஒரு கோளத்தை ஒரு தளமானது ஒரு வட்டத்தில் வெட்டுகின்றது என்பதை நாம் அறிந்ததே. ஆகவே, ஒரு வட்டத்தை, ஒரு கோளத்தின் சமன்பாட்டாலும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டாலும் குறிக்கலாம்.

இப்பொழுது சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \ldots \quad (56\cdot1)$$

$$ax + by + cz + l = 0 \quad \ldots \quad (56\cdot2)$$



படம் 33.

குறிக்கும் வட்டத்தின் ஆரத்தைக் காண்போம் (படம் 33). சமன்பாடு (56·1) குறிக்கும் கோளத்தின் மையத்தை c எனவும், அதன் ஆரத்தை r எனவும், c-லிருந்து, சமன்பாடு $ax + by + cz + e = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி N எனவும் கொள்வோம். இங்கு CN ஐ p எனக் குறிப்போம். P என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியை வட்டத்தின்மேல் எடுத்துக் கொண்டால், $CP = r$. இப்பொழுது முக்கோணம் CNP, ஒரு செங்கோண முக்கோணம். இதில் NP, கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் ஆரமாகும்.

ஆனல்,

$$NP^2 = CP^2 - CN^2$$
$$= r^2 - p^2$$

இங்கு $r^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d$

$$p^2 = \frac{[a(-u) + b(-v) + c(-w) + e]^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

ஆகவே,

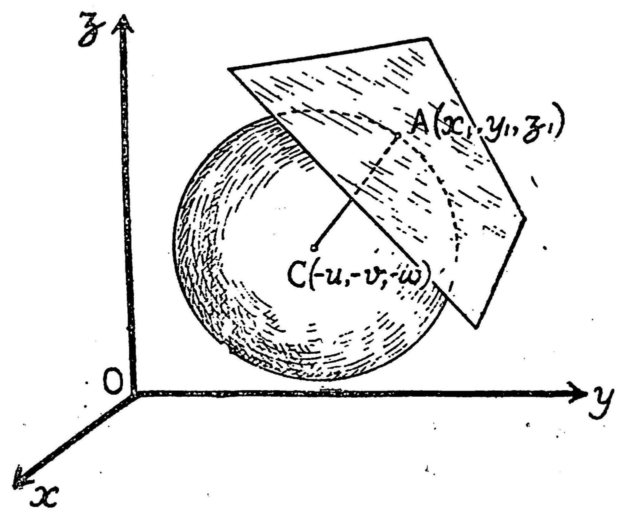
$$NP = \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2 - d) - \frac{(au + bv + cw - e)^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

§ 57. கோளத்தின் ஒரு புள்ளியிடத்துத் தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

இங்குச் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தின்மேல் உள்ள $A(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளி யிடத்துத் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 34).



படம் 34.

கோளத்தின் மையத்தை C எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்

$$C \equiv (-u, \ -v, \ -w).$$

A இடத்துத் தொடுதளம், CA-க்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். ஆனால் CA-ன் திசை விகிதங்கள்

$$x_1 + u, \ y_1 + v, \ z_1 + w$$

ஆகும். அதாவது தொடுதளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$x_1 + u, \ y_1 + v, \ z_1 + w$$

ஆகும். ஆகவே, தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$(x_1 + u)x + (y_1 + v)y + (z_1 + w)z + k = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். ஆனால், இத் தளம் (x_1, y_1, z_1) வழி யாகச் செல்லுகிறது.

ஆகவே,

$$(x_1+u)x_1+(y_1+v)y_1+(z_1+w)z_1+k=0.$$

எனவே, $k=-[(x_1+u)x_1+(y_1+v)y_1+(z_1+w)z_1]$.

ஆகவே, தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$(x_1+u)x+(y_1+v)y+(z_1+w)z$$
$$-[(x_1+u)x_1+(y_1+v)y_1+(z_1+w)z_1]=0$$

என்றுகிறது. இதை மாற்றி எழுத,

$$xx_1+yy_1+zz_1+u(x-x_1)+v(y-y_1)+w(z-z_1)$$
$$-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது (x_1, y_1, z_1) கோளத்தின் மேல் உள்ளதால்,

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d=0$$

அதாவது,

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=-(2ux_1+2vy_1+2wz_1+d)=0$$

இதைப் பயன்படுத்த தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$$

என்று சுருங்குகிறது என்பதை எளிதில் காணலாம். இச் சமன்பாட்டை, § 96-ல் கூறப்பட்டுள்ள குறியீட்டு முறையில்

$$T_1=0$$

என்று குறிப்பிடலாம் என்பதையும் காணலாம்.

§ 58. ஒரு தளம் ஒரு கோளத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை

இங்குச் சமன்பாடு

$$ax+by+cz+k=0,$$

குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு

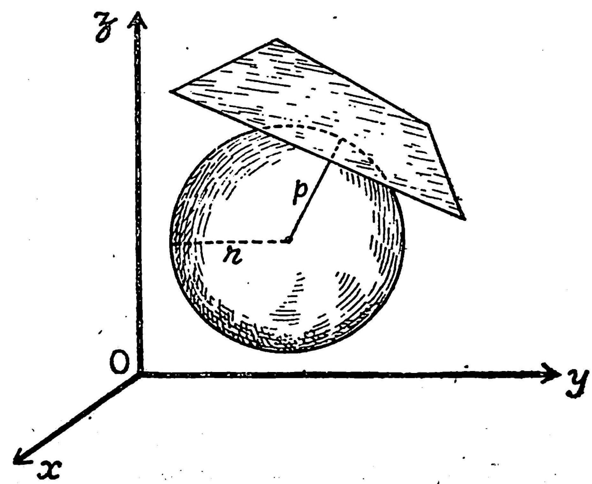
$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

குறிக்கும் கோளத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். இந் நிபந்தனை $p^2=r^2$ ஆகும் (படம் 35). இங்கு p என்பது, கோளத்தின் மையத்திலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்; r என்பது கோளத்தின் ஆரம். ஆனால், கோளத்தின் மையம்

$$(-u, -v, -w).$$

எனவே, $p^2 = \dfrac{\{a(-u) + b(-v) + c(-w) + k\}^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

மேலும், $r^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d.$



படம் 35.

எனவே, வேண்டிய நிபந்தனை

$$\frac{(-au - bv - cw + k)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = u^2 + v^2 + w^2 - d$$

அதாவது $(au + bv + cw - k)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)$
$(u^2 + v^2 + w^2 - d)$ ஆகும்.

§59. ஒரு கோடு ஒரு கோளத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை

இங்குச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda} = \frac{y-y_1}{\mu} = \frac{z-z_1}{\nu}$$

குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகளை

$(x_1 + \lambda k, y_1 + \mu k, (z_1 + \nu k)$

என்ற துணையலகு வடிவில் குறிக்கலாம். கோடு கோளத்தை வெட்டும் புள்ளிகளைத் தரும் k-ன் மதிப்புகளை

$$(x_1 + \lambda k)^2 + (y_1 + \mu k)^2 + (z_1 + \nu k)^2 - r^2 = 0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிலிருந்து அடைகிறோம்.

இச் சமன்பாட்டை,

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) k^2 + 2 (\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1) k + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2) = 0$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். கொடுக்கப்பட்ட கோடு, கோளத்தைத் தொட்டால், வெட்டும் புள்ளிகள் இணைந்த புள்ளிகளாகும். அதாவது மேற்கண்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாகும். ஆகவே, இச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியமாகும். எனவே, வேண்டிய நிபந்தனை

$$(\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1)^2 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2) = 0$$

என்பதாகும்.

§ 60. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. புள்ளிகள் (3, 4, 2), (2, 0, 5), (2, 4, 5), (3, 3, 1) வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. கோளத்தின் மையத்தையும், ஆரத்தையும் காண்க.

கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

எனக் கொள்வோம். கோளம், புள்ளி (3, 4, 2) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$3^2 + 4^2 + 2^2 + 2u(3) + 2v(4) + 2w(2) + d = 0$$

அதாவது $6u + 8v + 4w + d = -29$ ... (1)

இதுபோலவே கோளம், புள்ளிகள் (2, 0, 5), (2, 4, 5), (3, 3, 1) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$4u + 10w + d = -29 \quad \ldots (2)$$

$$4u + 8v + 10w + d = -45 \quad \ldots (3)$$

$$6u + 6v + 2w + d = -19 \quad \ldots (4)$$

என்று பெறுகிறோம். சமன்பாடுகள் (1), (2), (3), (4) ஆகியவற்றை u, v, w முதலியவற்றிற்கு விடுவிக்க,

$$u = -1, \; v = -2, \; w = -3, \; d = 5$$

என்று கிடைக்கிறது, ஆகவே, கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$$

என்றாகிறது. மேலும், கோளத்தின் மையம் $(1, 2, 3)$ எனவும், கோளத்தின் ஆரம்

$$\sqrt{(-1^2)+(-2)^2+(-3)^2-5}=3$$

எனவும் கிடைக்கின்றது.

கணக்கு 2. புள்ளிகள் $(3, 1, 1)$, $(-1, 0, 2)$ வழியாகச் செல்லும் கோளம் ஒன்றின் மையம், சமன்பாடுகள்

$$2x-y+z=3, \quad x+y+z=6$$

குறிக்கும் தளங்கள் இரண்டிலும் அமைந்தால் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

எனக் கொள்வோம். கோளம், புள்ளிகள் $(3, 1, 1)$, $(-1, 0, 2)$ வழியாகச் செல்லுவதால்

$$3^2+1^2+1^2+2u(3)+2v(1)+2w(1)+d=0$$

$$(-1)^2+0^2+2^2+2u(-1)+2v(0)+2w(2)+d=0$$

அதாவது $6u+2v+2w+d=-11$ ... (1)

$-2u+4w+d=-5$ ... (2)

என்று கிடைக்கின்றது, கோளத்தின் மையம்

$$(-u, -v, -w)$$

ஆகும். இம் மையம், தளங்கள் $2x-y+z=3$, $x+y+z=6$ இரண்டிலும் அமைவதால்

$$2(-u)-(-v)+(-w)=3,$$

$$(-u)+(-v)+(-w)=6.$$

அதாவது $-2u+v-w=3$ ... (3)

$-u-v-w=6$ ... (4)

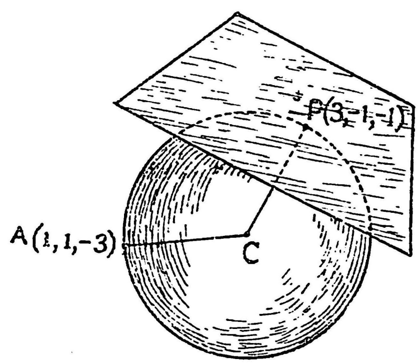
சமன்பாடுகள் (1), (2), (3), (4) ஆகியவற்றை u, v, w முதலியவற்றிற்கு விடுவிக்க

$$u=-1, \quad v=-2, \quad w=-3, \quad d=5$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆகவே, கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0.$$

கணக்கு 3. புள்ளி $(1, 1, -3)$ வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோளம், சமன்பாடு $x - 2y - 2z - 7 = 0$ குறிக்கும் தளத்தைப் புள்ளி $(3, -1, -1)$ இடத்துத் தொடுகின்றது. இக் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க (படம் 36).



படம் 36.

கோளத்தின் மையத்தை C எனவும், புள்ளி $(3, -1, -1)$ஐ P எனவும், புள்ளி $(1, 1, -3)$ஐ A எனவும் கொள்வோம். PC, தளத்திற்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே, PC-ன் திசை விகிதங்கள்

$$1, -2, -2$$

ஆகும். மேலும், $P \equiv (3, -1, -1)$. ஆகவே, Cஐ

$$(3 + k, -1, -2k, -1 -2k)$$

என்று எழுதலாம். கோளத்தின் ஆரம் CA-க்குச் சமம். எனவே, சமன்பாட்டை

$$\{x - (3+k)\}^2 + \{y + (1+2k)\}^2 + \{z + (1+2k)\}^2 = CA^2$$

என்று எழுதலாம். ஆனால்,

$$\begin{aligned} CA^2 &= (3 + k - 3)^2 + (-1-2k+1)^2 + (-1-2k+1)^2 \\ &= k^2 + 4k^2 + 4k^2 \\ &= 9k^2 \end{aligned}$$

ஆகவே, கோளத்தின் சமன்பாடு

$$(x-3-k)^2+(y+1+2k)^2+(z+1+2k)^2=9k^2 \quad \ldots \quad (1)$$

ஆகும். ஆனால், கோளம் $(1, 1, -3)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. எனவே, கீழ்க்கண்டவாறு கிடைக்கின்றது.

$$(1-3-k)^2+(1+1+2k)^2+(-3+1+2k)^2=9k^2$$

அதாவது

$$(-2-k)^2+(2+2k)^2+(-2+2k)^2=9k^2$$

அதாவது $9k^2+4k+12=9k^2$

அதாவது $4k+12=0$

அதாவது $k=-3$

இம் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிடக் கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+(y-5)^2+(z-5)^2=81$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 4. ஒரு நகரும் தளம், நிலைத்த புள்ளி (α, β, γ) வழியாகச் சென்றுகொண்டே நகருகிறது. இத் தளம், கூற்றச்சுகளை வெட்டும் புள்ளிகள் A, B, C என்றால், புள்ளிகள் A, B, C வழியாகவும், ஆதி வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் மையத்தின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

புள்ளிகள் A, B, C மூன்றும் கூற்றச்சுகளின் மேல் நகரும் புள்ளிகள். இவற்றை

$$(a, 0, 0), \ (0, b, 0), \ (0, 0, c)$$

எனக் கொள்வோம். இங்கு a, b, c என்பன மாறிலிகள் அல்ல.

தளம் ABC-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ஆகும். இத் தளம், புள்ளி (α, β, γ) வழியாகச் செல்லுகிறது.

ஆகவே,

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=1 \quad \ldots \quad (1)$$

ஆதி வழியாகவும் A, B, C வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டை,

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz=0$$

எனக் கொள்வோம்.

கோளம் A வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$a^2 + 0^2 + 0^2 + 2u(a) + 2v(0) + 2w(0) = 0$$

அதாவது $\quad a^2 + 2ua = 0$

அதாவது $\quad u = -\frac{a}{2}$

இது போலவே $v = -\frac{b}{2}$, $w = -\frac{c}{2}$ என்றும், இதனுல் கோளத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. மேலும், கோளத்தின் மையம்

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது கோளத்தின் மையத்தை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொண்டால்,

$$x_0 = \frac{a}{2}, \; y_0 = \frac{b}{2}, \; z_0 = \frac{c}{2}$$

அல்லது, $\quad a = 2x_0, \; b = 2y_0, \; c = 2z_0$

என்று கிடைக்கின்றது. இம் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட

$$\frac{\alpha}{2x_0} + \frac{\beta}{2y_0} + \frac{\gamma}{2z_0} = 1$$

என்று கிடைக்கின்றது. இதிலிருந்து (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{\alpha}{2x} + \frac{\beta}{2y} + \frac{\gamma}{2z} = 1$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 5. ஒரு மாறிலி ஆரம் r ஐக் கொண்ட ஒரு கோளம், ஆதியின் வழியாகச் சென்றுகொண்டே சுழல்கின்றது. இக் கோளம் கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினுல், முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியைக் காண்க.

A, B, C என்ற புள்ளிகளை முறையே

$$(a, 0, 0), \quad (0, b, 0), \quad (0, 0, c)$$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், ஆதி வழியாகவும்,

புள்ளிகள் A, B, C வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$$

ஆகும் என முந்திய கணக்கிலேயே கண்டோம். இக் கோளத்தின் ஆரம் r எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே, $$\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{c}{2}\right)^2=r^2$$

அதாவது, $a^2+b^2+c^2=4r^2$

முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொண்டால்,

$$x_0=\frac{a+0+0}{3},\quad y_0=\frac{0+b+0}{3},\quad z_0=\frac{0+0+c}{3}$$

என்றும், அதாவது

$$a=3x_0\quad b=3y_0,\quad c=3z_0$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இம் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட

$$(3x_0)^2+(3y_0)^2+(3z_0)^2=4r^2$$

என்று கிடைக்கின்றது. இதிலிருந்து முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரை, சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4r^2}{9}$$

குறிக்கும் கோளம் என்று அறிகிறோம்.

கணக்கு 6. சமன்பாடு $2x-2y+z-27=0$ குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2-225=0$ குறிக்கும் கோளத்தை வெட்டும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.

கோளத்தின் மையம் $O(0, 0, 0)$. வட்டத்தின் மையத்தை N என்றும், வட்டத்தின் மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியை P எனவும் கொள்வோம். ON கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்துக்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே, அதன் திசை விகிதங்கள்

$$2,\ -2,\ 1$$

ஆகும். இப்பொழுது N ஐ

$$(0+2k,\ 0-2k,\ 0+k)$$

என்ற வடிவில் எழுதலாம்.

N-ன் கூறுகள், சமன்பாடு $2x-2y+z-27=0$ ஐத் திருப்தி செய்யும். ஆகவே,

$$2(2k)-2(-2k)+k-27=0$$

அதாவது $9k-27=0$

அதாவது $k=3$

எனவே, $N\equiv(6,-6,3)$. மேலும்

$$NP^2=OP^2-ON^2$$
$$=225-(36+36+9)$$
$$=144$$

ஆகவே, வட்டத்தின் ஆரம் 12 ஆகும்.

கணக்கு 7. சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2=r^2$ குறிக்கும் கோளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டே நகரும் ஒரு தளம், கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. முக்கோணம், ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

A, B, C என்ற புள்ளிகளை

$(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் தளம், ABC-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

ஆகும். இத் தளம் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

குறிக்கும் தளத்தைத் தொடுகிறது. ஆகவே $p^2=r^2$. இங்கு

$$p^2=\frac{\left(\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-1\right)^2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}.$$

எனவே, $$\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=r^2$$

அதாவது $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{r^2} \qquad \ldots (1)$$

ஆனால், முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொண்டால்,

$$x_0 = \frac{a+0+0}{3}, \quad y_0 = \frac{0+b+0}{3}, \quad z_0 = \frac{0+0+c}{3}$$

அதாவது $\quad a = 3x_0, \quad b = 3y_0, \quad c = 3z_0.$

இம் மதிப்புகளைத் தொடர்பு (1)-ல் பிரதியிட

$$\frac{1}{(3x_0)^2} + \frac{1}{(3y_0)^2} + \frac{1}{(3z_0)^2} = \frac{1}{r^2}$$

என்றும், இதிலிருந்து மையக்கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{9x^2} + \frac{1}{9y^2} + \frac{1}{9z^2} = \frac{1}{r^2}$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

கணக்கு 8. சமன்பாடுகள்

$$y - mx = 0, \quad z - c = 0; \quad y + mx = 0, \quad z + c = 0$$

குறிக்கும் கோடுகள் இரண்டையும் தொட்டுக் கொண்டே கோளம் ஒன்று உருமாறுகிறது. இக் கோளத்தின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

எனக் கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளில் முதல் கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளியை

$$(k, mk, c)$$

என்று துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். ஆகவே, இக் கோடு கோளத்தை வெட்டும் புள்ளியைத் தரும் k-ன் மதிப்பை

$$k^2 + m^2k^2 + c^2 + 2uk + 2vmk + 2wc + d = 0$$

அதாவது,

$$(1 + m^2)k^2 + 2(u + vm)k + (c^2 + 2wc + d) = 0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறுகிறோம். ஆனால், கோடு கோளத்தைத் தொடுவதால், k-ன் மதிப்புகள் சமமாகும். எனவே,

$$(u + vm)^2 - (1 + m^2)(c^2 + 2wc + d) = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

ஆனால், இரண்டாவது கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளை

$$(k, -mk, -c)$$

என்று துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். எனவே, இக்கோடு கோளத்தை வெட்டுவதற்கான நிபந்தனையை (1)-ல் m-க்குப் பதிலாக $(-m)$ ஐயும், c-க்குப் பதிலாக $(-c)$ ஐயும், பிரதியிட்டு

$$(u - vm)^2 - (1 + m^2)(c^2 - 2wc + d) = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

என்று பெறுகிறோம்.

கோளத்தின் மையப் புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) என்று கொண்டால்,

$$x_0 = -u, \quad y_0 = -v, \quad z_0 = -w$$

அதாவது $\quad u = -x_0 \quad v = -y_0 \quad w = -z_0 \quad \cdots \quad (3)$

என்று கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது u, v, w, d என்பன மாறிகள். இவற்றைத் தொடர்புகள் (1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து நீக்குவதற்கு (1)-லிருந்து (2) ஐக் கழித்து d ஐ நீக்கிப் பின் (3) ஐப் பயன்படுத்தி, u, v, w ஆகியவற்றை நீக்கவேண்டும். இம் முறையில் கிடைக்கும் விளைவானது

$$m\, x_0\, y_0 + (1 + m^2)\, c z_0 = 0$$

ஆகும். இதிலிருந்து கோளத்தின் மையத்தின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$m x y + (1 + m^2)\, c z = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

§61. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) புள்ளிகள் (2, 3, 1), (1, −1, 4), (1, 3, 4), (2, 2, 0) வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டையும், மையத்தையும், ஆரத்தையும் காண்க.

(2) புள்ளிகள் (0, 0, 0), $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0\ 0, c)$ வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) புள்ளிகள் (1, 2, 0) (0, −2, 3), (0, 2. 3), (1, 1, −1) வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டையும், மையத்தையும், ஆரத்தையும் காண்க.

(4) புள்ளிகள் (0, 1, −1), (−1, −3, 2) (−1, 1, 2), (0, 0, 2) வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டையும், மையத்தையும், ஆரத்தையும் காண்க.

(5) புள்ளிகள் (1, −1, −1), (−3, −2, 0) வழியாகச் செல்லும் கோளம் ஒன்றின் மையம் சமன்பாடுகள்

$$2x - y + z + 1 = 0, \quad x + y + z = 0$$

குறிக்கும் தளங்கள் இரண்டிலும் அமைந்தால் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(6) புள்ளிகள் (0, 1, 2) (−4, 1 −1, 0) இரண்டையும் ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(7) புள்ளிகள் (2, 3, 4), (−2, 1, 2) இரண்டையும் ஒரு விட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(8) ஒரு நான்முகியின் முகங்களின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

என்பன. இந் நான்முகியின் உச்சிகளின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: (0, 0, 0), $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$ என்பன நான்முகியின் உச்சிகள்.]

(9) புள்ளி (2, 3, 1) வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோளம் சமன்பாடு $2x + y - 2z - 6 = 0$ குறிக்கும் தளத்தை (2, 2, 0) இடத்துத் தொடுகிறது. இக் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(10) ஆதி வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோளத்தின் மையத்தின் கூறுகள் அனைத்தும் மிகையானவை. yOz, zOx, xOy தளங்கள் இக் கோளத்தை வெட்டும் வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, $c\sqrt{2}$ என்றால், கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ux - 2vy + 2wz = 0$$

எனக் கொள்க. இங்கு u, v, w என்பன மிகையானவை. கோளத்தின் மையம் (u, v, w). கோளத்தின் ஆரம் $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ புள்ளி (u, v, w), yOz தளத்திலிருந்து u தூரத்தில் உள்ளது. மேலும் yOz தளம், கோளத்தை வெட்டும் வட்டத்தின் ஆரம் $a\sqrt{2}$. ஆகவே,

$$(u)^2 = (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2})^2 - (a\sqrt{2})^2]$$

(11) ஒரு கோளத்தின் மையம் ஆதியாகிய O; ஆரம் 1. A, B என்பன கோளத்தின் விட்டத்தின் மேலுள்ள இரு புள்ளிகள். $AO \cdot OB$, 1-க்குச் சமமாக இருக்குமாறு அவை அமைந்துள்ளன. P என்பது கோளத்தின் மீதுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்றால், $\frac{AP}{BP}$ ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : O ஐ ஆதியாகவும், OA ஐ x அச்சாகவும் கொண்டால்,

$$A \equiv (a, 0, 0), \quad B \equiv \left(\frac{1}{a}, 0, 0\right)$$

இங்கு a ஒரு மாறிலி.]

(12) ஒரு நகரும் தளம் x, y, z அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆதியையும், புள்ளிகள் A, B, C மூன்றையும் உச்சிகளாகக் கொண்ட நான்முகியின் பருமன் மாறிலி k-க்குச் சமமானல், ஆதி வழியாகவும், புள்ளிகள் A, B, C வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$16x^2y^2z^2 = 9k^2$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: A, B, C என்ற புள்ளிகளை $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ எனக் கொண்டால், நான்முகியின் பருமன் $\pm \frac{1}{6} abc$. ஆகவே, $a^2 b^2 c^2 = 36k^2$. ஆதி வழியாகவும் A, B, C வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் மையம் (x_0, y_0, z_0) என்றால்,

$$x_0 = \frac{1}{2} a, \quad y_0 = \frac{1}{2} b, \quad z_0 = \frac{1}{2} c. \text{]}$$

(13) ஒரு மாறிலி r ஐ ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு கோளம், ஆதி வழியாகச் சென்று கொண்டே நகருகிறது. இக் கோளம் கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினல் ஆதியையும் A, B, C மூன்றையும் உச்சிகளாகக் கொண்ட நான்முகியின் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(14) சமன்பாடு $x + 2y + 3z - 14 = 0$ குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ குறிக்கும் கோளத்தை வெட்டுவதால் உண்டாக்கும் வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரத்தையும் காண்க.

(15) சமன்பாடு $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ குறிக்கும் கோளத்தை ஒரு தளம் வெட்டும் வட்டத்தின் மையம் (1, 2, 3) என்ருல் வட்டத்தின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : கோளத்தின் மையத்தையும், வட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் $1 - 0$, $2 - 0$, $3 - 0$. இக்கோடு தளத்திற்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே, தளத்தின் சமன்பாடு $x + 2y + 3z + d = 0$ என்றிருக்கும்.]

(16) புள்ளி (3, 3, 3) ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டம் ஒன்று, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z - 4 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தின்மேல் அமைந்துள்ளது. இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. வட்டத்தின் ஆரத்தையும் காண்க.

(17) ஒரு மாருத ஆரம் r ஐக் கொண்ட ஒரு கோளம், ஆதி வழியாகச் சென்று கொண்டே நகருகிறது. இக்கோளம் கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினுல் A, B, C வழியாகச் செல்லும் தளத்துக்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : செங்குத்துக் கோட்டின் அடியை (x_0, y_0, z_0) எனவும், A, B, C ஆகியவற்றை $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ எனவும் கொண்டால், தளம் ABC-ன் சமன்பாடு

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0$$

என்றிருக்கும். இங்கு,

$$a = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_0}, \quad b = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{y_0}, \quad c = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{z_0}\Bigg]$$

18. சமன்பாடு $x^2 + y^2 + z^2 = 26$ குறிக்கும் கோளத்தை ஒரு விட்டத்தைப் பொறுத்து ஓரளவிற்குச் சுழற்ற, கோளத்தின் மேலுள்ள P என்ற ஒரு புள்ளி, புள்ளி (3, 4, 1)-லிருந்து புள்ளி (0, 1, 5)-க்கு எடுத்துச் செல்லப்படுகிறது. P ஒரு பெரு வட்டத்தின் (great circle)மேல் ஊர்ந்திருந்தால், இவ் விட்டத்தின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : விட்டம், வட்டத்தின் மையத்தின் வழியாகவும் (3, 4, 1), (0, 1, 5) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகவும் செல்லும் தளத்துக்குச் செங்குத்தானது.]

19. $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0. 0, c)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையத்தை

$$\left\{ \frac{\frac{a}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}, \frac{\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}, \frac{\frac{c}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \right\}$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை A, B, C எனக் கொள்வோம். A, B, C வழியாகவும், ஆதி வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+z^2-ax-by+cz=0.$$

இதன் மையம் $\left[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right]$. இம் மையத்திலிருந்து ABC என்ற தளத்துக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடி, வேண்டிய புள்ளியாகும். தளம் ABC-ன் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ஆகும்.]

(20) சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2=r^2$ குறிக்கும் கோளம் ஒன்றைத் தொட்டுக்கொண்டே நகரும் ஒரு தளம், கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. A, B, C வழியாக கூற்றுத் தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்படும் தளங்கள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(21) சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2=r^2$ குறிக்கும் கோளம் ஒன்றைத் தொட்டுக்கொண்டே நகரும் ஒரு தளம், கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆதி வழியாகவும் A, B, C வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் மையப் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(22) சமன்பாடுகள் $x-4y-z=0$, $x+z-6=0$ குறிக்கும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்று, சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2=9$ குறிக்கும் கோளத்தைத் தொடுகிறது. இத்தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : தளத்தின் வேண்டிய சமன்பாட்டை

$$(x-4y-z)+\lambda(x+z-6)=0$$

என்று, அதாவது,

$$(1+\lambda)x+(-4)y+(-1+\lambda)z-6\lambda=0$$

என்று கொண்டால்,

$$\frac{\{(1+\lambda)0+(-4)0+(-1+\lambda)0+(-6\lambda)\}^2}{(1+\lambda)^2+(-4)^2+(-1+\lambda)^2}=3^2\ ]$$

(23) சமன்பாடு $x-z+1=0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு இணையாக இருக்குமாறும், சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+10=0$$

குறிக்கும் கோளத்தைத் தொடுமாறும் உள்ள தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(24) சமன்பாடுகள் $x^2+y^2+z^2=9$, $7x-y+z-11=0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் புள்ளி $(2, 2, -1)$ இடத்துத் தொடு கோட்டை

$$7x-y+z-11=0,\quad 2x+2y-z-9=0$$

என்று எழுதலாம் எனக் காட்டுக.

(25) சமன்பாடுகள் $y-2x=0$, $z-1=0$, $y+2x=0$, $z+1=0$ குறிக்கும் கோடுகள் இரண்டையும் தொட்டுக் கொண்டே கோளம் ஒன்று உரு மாறுகிறது. இக் கோளத்தின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு $2xy+5z=0$ காட்டுக.

விடைகள்

(1) $x^2+y^2+z^2-2y-4z-4=0$, $(0, 1, 2)$, 3

(2) $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$

(3) $x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$, $(-1, 0, 1)$, 3

(4) $x^2+y^2+z^2+4x+2y-4=0$, $(-2, -1, 0)$, 3

(5) $x^2+y^2+z^2+4x-2z-1=0$

(6) $x^2+y^2+z^2+4x-2z-1=0$

(7) $x^2+y^2+z^2-4y-6z+7=0$

(8) $x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0$

(9) $x^2+y^2+z^2-2y-4z-4=0$

(10) $x^2+y^2+z^2-2\sqrt{b^2+c^2-a^2}\,x-2\sqrt{a^2+c^2-b^2}\,y$
$-2\sqrt{a^2+b^2-c^2}\,z=0$

(13) $9(x^2+y^2+z^2)=4r^2$

(14) $(1, 2, 3)$, $\sqrt{11}$

(15) $x^2+y^2+z^2=25$, $x+2y+3z-14=0$

(16) $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z-4=0$, $x+y+z-9=0$

(17) $(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)=4r^2$

(18) $\frac{x}{19}=\frac{y}{-15}=\frac{z}{3}$

(20) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{r^2}$

(21) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{4}{r^2}$

(22) $2x-2y+z-9=0$, $x+2y+2z-9=0$

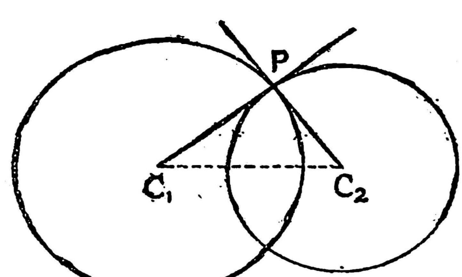
(23) $x-z+2=0$, $x-z-2=0$.

§ 62. குத்துக் கோளங்கள் (Orthogonal spheres)

இரண்டு வெட்டும் கோளங்களின் பொதுப் புள்ளி ஒன்றினிடத்து வரையப்படும் தொடுதளங்கள் செங்குத்தானவையானால், கோளங்கள், குத்துக் கோளங்கள் என்று வழங்கப்படுகின்றன.

இப்பொழுது சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1=0$$
$$x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2=0$$



படம் 37.

குறிக்கும் கோளங்கள் குத்துக் கோளங்களானால், கிடைக்கும் விளைவைக் காண்போம் (படம் 37).

முதல் கோளத்தின் மையத்தை C_1 எனவும், இரண்டாவது கோளத்தின் மையத்தை C_2 எனவும், கோளங்களின் பொதுப் புள்ளியொன்றை P எனவும் கொள்வோம். மேலும், முதல் கோளத்தின் P இடத்துத் தொடுதளத்தை π_1 எனவும், இரண்டாவது கோளத்தின் P இடத்துத் தொடுதளத்தை π_2 எனவும் கொள்வோம். இப்பொழுது PC_1 ஆனது π_1-ன் செங்கோடாகும்; PC_2 ஆனது π_2-ன் செங்கோடாகும். ஆனால், இத் தொடுதளங்கள் செங்குத்தானவை. ஆகவே, இவற்றின் செங்கோடுகளும் செங்குத்தானவை. அதாவது

$$C_1\hat{P}C_2 = 90^\circ.$$

எனவே, $C_1P^2 + C_2P^2 = C_1C_2^2$

ஆனால், $C_1P^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - d_1$

$C_2P^2 = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 - d_2$

மேலும் $C_1 \equiv (-u_1, -v_1, -w_1)$, $C_2 \equiv (-u_2, -v_2, -w_2)$.

ஆகவே, $C_1C_2^2 = (u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2 + (w_1-w_2)^2$.

எனவே, வேண்டிய நிபந்தனை

$$(u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2 + (w_1-w_2)^2$$
$$= (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - d_1) + (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 - d_2)$$

என்றாகிறது. இதைச் சுருக்க, முடிவில்

$$(2u_1)(2u_2) + (2v_2)(2v_1) + (2w_1)(2w_2) = 2(d_1 + d_2), \quad \ldots (62\cdot1)$$

என்று கிடைக்கின்றது. நிபந்தனையைச் சொற்கள் வடிவில்,

(முதல் சமன்பாட்டின் x குணகம்) (இரண்டாம் சமன்பாட்டின் x குணகம்)

+ (முதல் சமன்பாட்டின் y குணகம்) (இரண்டாம் சமன்பாட்டின் y குணகம்)

+ (முதல் சமன்பாட்டின் z குணகம்) (இரண்டாம் சமன்பாட்டின் z குணகம்)

= 2 [முதல் சமன்பாட்டின் மாறிலி + இரண்டாம் சமன்பாட்டின் மாறிலி] ... (62·2)

என்று எழுதலாம்.

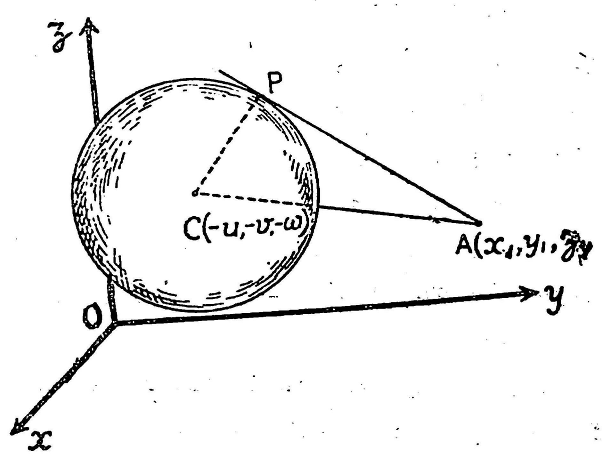
மறுதலையாக, தொடர்பு (62·1) உண்மையானால், கோளங்கள் குத்துக்கோளங்கள் ஆகும் என எளிதில் காட்டலாம்.

§ 63. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கோளத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம்

இங்கு $A(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

குறிக்கும் கோளத்திற்கு வரையப்பட்ட ஒரு தொடு கோட்டின் நீளத்தைக் காண்போம் (படம் 38). கோளத்தின் மையம் C ஆனது $(-u, -v, -w)$ ஆகும். தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளியை P எனக் கொண்டால்,



படம் 38.

$$AP^2 = AC^2 - CP^2$$
$$= (x_1 + u)^2 + (y_1 + v)^2 + (z_1 + w)^2 - (u^2 + v^2 + w^2 - d)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d_1$$

ஆகவே,

$$AP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d}$$

§ 64. சமத் தொடுதளம் (Radical plane)

ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட இரு கோளங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமானால் அப் புள்ளியின் இயங்குவரை கோளங்களின் சமத் தொடுதளம் என வழங்கப்படுகின்றது.

இப்பொழுது, சமன்பாடுகள்

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$S' = x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$$

குறிக்கும் கோளங்களின் சமத்தொடு தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். சமத் தொடுவரைத் தளத்தின் மேல் (x_0, y_0, z_0) என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இப் புள்ளியிலிருந்து கோளங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமாகும். ஆகவே,

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2\,ux_0 + 2\,vy_0 + 2\,wz_0 + d}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z^2 + 2\,u'x_0 + 2\,v'y_0 + 2\,w'z_0 + d'}$$

அதாவது $\quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2\,ux_0 + 2\,vy_0 + 2\,wz_0 + d$

$$= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2\,u'x_0 + 2\,v'y_0 + 2\,w'z_0 + d'.$$

இதிலிருந்து சமத்தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,ux + 2\,vy + 2\,wz + d$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2\,u'x + 2\,v'y + 2\,w'z + d' \quad \ldots \quad (64{\cdot}1)$$

என்றாகிறது. இச் சமன்பாட்டை குறியீட்டு முறையில்

$$S - S' = 0 \qquad (64{\cdot}2)$$

என்று எழுதலாம். இச் சமன்பாட்டைச் சுருக்கி எழுத

$$2\,(u - u')x + 2\,(v - v')\,y + 2\,(w - w')\,z + (d - d\ ) = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாடு ஒரு ஒருபடிச் சமன்பாடு ஆகையால், இஃது ஒரு தளத்தைக் குறிக்கிறது.

அடுத்தபடியாக, இத் தளம் கோளங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது எனக் காட்டுவோம். இத் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$u - u', \; v - v', \; w - w'$$

ஆகும். கோளங்களின் மையங்கள்

$$(-u, \; -v, \; -w), \; (-u', \; -v', \; -w').$$

எனவே, மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$u - u', \; v - v', \; w - w'.$$

ஆகவே, மையங்களைச் சேர்க்கும் கோடு, சமத் தொடுதளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது என்று அறிகிறோம்.

இப்பொழுது, ஒரு நேர் கோட்டில் அமையாத மையங்களைக் கொண்ட கோளங்கள் மூன்றில் இரண்டிரண்டாக எடுத்து அவற்றின் சமத் தொடுதளங்களைக் கண்டு அத் தளங்கள் மூன்றும் ஒரு நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன எனக் காட்டுவோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோளங்களின் சமன்பாடுகளை

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$
$$S' = x^2 + y^2 + z^2 + 2u'x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$$
$$S'' = x^2 + y^2 + z^2 + 2u''x + 2v''y + 2w''z + d'' = 0$$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் சமத் தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$S - S' = 0, \quad S' - S'' = 0, \quad S'' - S = 0$$

ஆகும். இப்பொழுது S_1, S_1', S_1'', என்பன முறையே

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d,$$
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2u'x_1 + 2v'y_1 + 2w'z_1 + d',$$
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2u''x_1 + 2v''y_1 + 2w''z_1 + d''$$

என்பவற்றைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். (x_1, y_1, z_1) என்பது சமன்பாடுகள் $S - S' = 0$, $S' - S'' = 0$ குறிக்கும் நேர் கோட்டின்மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி என்றால்,

$$S_1 - S_1' = 0, \quad S_1' - S_1'' = 0.$$

இவற்றில் ஒன்றை ஒன்றிலிருந்து கழிக்க,

$$S_1'' - S_1 = 0$$

என்று கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து (x_1, y_1, z_1) ஆனது சமன்பாடு

$$S'' - S = 0$$

குறிக்கும் தளத்தின் மேலுள்ளது என்றாகிறது. ஆகவே, இத் தளம், சமன்பாடுகள் $S - S' = 0$, $S' - S'' = 0$ குறிக்கும் நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றது என்றாகின்றது. அதாவது கோளங்களின் மூன்று சமத்தொடு தளங்களும் ஒரு நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றது எனத் தெரிகின்றது. இந் நேர்கோடு சமத்தொடு அச்சு (Radical line) என்று வழங்கப்படுகின்றது. இதுபோலவே ஒரு தளத்தில் அமையாத நான்கு புள்ளிகளை மையங்களாக கொண்ட கோளங்கள் நான்கில், மூன்று மூன்றாக எடுத்து அவற்றின் சமத் தொடுவச்சுகளைக் கண்டு, அவ்வச்சுகள் நான்கும் ஒரே புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டலாம். இப் புள்ளிக்குச் சமத்தொடு அச்சுச் சந்தி (Radical centre) எனப் பெயர்.

§ 65. சமன்பாடு $S+\lambda P=0$. இங்கு S ஐயும், P ஐயும் முறையே

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wy+d,$$
$$ax+by+cz+e$$

என்ற கோவைகளைக் குறிப்பதாகக் கொண்டு, சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ குறிக்கும் இயங்குவரையின் தன்மையைக் காண் போம். ஆனால், சமன்பாடுகள்

$$S=0, \; P=0$$

முறையே ஒரு கோளத்தையும், ஒரு தளத்தையும் குறிக்கின்றன என்பது நாம் அறிந்ததே. λ-ன் எம் மதிப்புக்கும் சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கின்றது என்பதைச் சமன்பாட்டிலுள்ள குணகங்களைக் கண்டு அறியலாம்.

முதலில் சமன்பாடு $S=0$ குறிக்கும் கோளத்தை, சமன்பாடு $P=0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். இங்கு வெட்டுத்தளம் ஒரு வட்டமாகும் என்பது நாம் அறிந்ததே. (x_1, y_1, z_1) என்பது இவ் வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி என்றால்,

$$S_1=0, \; P_1=0.$$

இவற்றிலிருந்து, புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஆனது, சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ குறிக்கும் கோளத்தின் மேலுள்ளது என்று தெரிகிறது. அதாவது சமன்பாடுகள் $S=0$, $P=0$ குறிக்கும் வட்டத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும், சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ குறிக்கும் கோளத்தின் மேல் அமைந்துள்ளன. எனவே, கோளம் $S+\lambda P=0$ ஆனது, சமன்பாடுகள் $S=0$, $P=0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லுகின்றது.

இதேபோல், கோளம் $S=0$ ஐத் தளம் $P=0$ தொட்டால், சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ ஆனது, ஒரு கோளத்தைக் குறிக் கின்றது என்றும், இக் கோளம், $S=0$ குறிக்கும் கோளத்தைத் தொடுகிறது என்றும், இக் கோளங்களின் தொடுபுள்ளியிடத்துப் பொது தொடுதளமாகத் தளம் $P=0$ அமைகின்றது என்றும் எளிதில் காணலாம்,

மேலும், கோளம் $S=0$ ஐத் தளம் $P=0$, வெட்டா விட்டால், கோளம் $S+\lambda P=0$, கோளம் $S=0$ ஐ வெட்டாது என்பதையும், λ. பல மதிப்புகளைப் பெறும்போது $S+\lambda P=0$ குறிக்கும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டா என்பதையும் எளிதில் காணலாம்.

§66. சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ குறிக்கும் கோளங்களின் சமத் தொடுதளம்

λ, பல மதிப்புகளைப் பெறும் போது, சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ ஒரு கோளக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும். இக் குடும்பத்தின் கோளங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்து அவற்றின் சமத் தொடு தளங்களைக் காண்போம். இப்பொழுது சமன்பாடுகள்

$$S+\lambda_1 P=0, \quad S+\lambda_2 P=0$$

என்பன இக் குடும்பத்தின் இரண்டு கோளங்களைக் குறிக்கின்றன. இங்கு λ_1, λ_2-க்குச் சமமாகாது. இக் கோளங்களின் சமத் தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

$$(S+\lambda_1 P)-(S+\lambda_2 P)=0,$$

அதாவது, $(\lambda_1-\lambda_2)P=0$.

அதாவது, $P=0$.

அதாவது சமன்பாடு $P=0$ குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு $S+\lambda P=0$ குறிக்கும் குடும்பத்தின் பொதுச் சமத் தொடு தளமாகிறது.

§67. சமன்பாடு $S+\lambda S'=0$

இங்கு S ஐயும், S' ஐயும் முறையே

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d$$
$$x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'$$

என்ற கோவைகளைக் குறிப்பதாகக் கொண்டு, சமன்பாடு $S+\lambda S'=0$ குறிக்கும் இயங்குவரையின் தன்மையைக் காண்போம். ஆனால், சமன்பாடுகள்

$$S=0, \quad S'=0$$

இரு கோளங்களைக் குறிக்கின்றன என்பது நாம் அறிந்ததே. λ-ன் எம் மதிப்புக்கும், சமன்பாடு $S+\lambda S'=0$-ல், x^2, y^2, z^2 ஆகியவற்றின் குணகங்கள் சமமாகும். மேலும், yz, zx, xy ஆகியவற்றின் குணகங்கள் பூச்சியங்கள். ஆகவே, சமன்பாடு $S+\lambda S'=0$ ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கின்றது.

இப்பொழுது சமன்பாடு $S=0$ குறிக்கும் கோளத்தைச் சமன்பாடு $S'=0$ குறிக்கும் கோளம் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம். வெட்டுத் தளம் ஒரு வட்டமாகும் என்பது நாம்

அறிந்ததே. (x_1, y_1, z_1) என்பது இவ் வட்டத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி என்றால்,

$$S_1 = 0, \quad S'_1 = 0$$

இவற்றிலிருந்து, புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஆனது, சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$ குறிக்கும் கோளத்தின் மேலுள்ளது என்று தெரிகிறது. அதாவது சமன்பாடுகள் $S = 0$, $S' = 0$ குறிக்கும் வட்டத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$ குறிக்கும் கோளத்தின்மேல் அமைந்துள்ளன. எனவே, கோளம் $S + \lambda S' = 0$ ஆனது, சமன்பாடுகள் $S = 0$, $S' = 0$ குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லுகிறது.

இதேபோல், கோளம் $S = 0$ ஐக் கோளம் $S' = 0$ தொட்டால், சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$ ஆனது, ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கின்றது என்றும், இம் மூன்று கோளங்களும் ஒரே புள்ளியில் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என்றும் எளிதில் காணலாம்.

மேலும், கோளம் $S = 0$ ஐக் கோளம் $S' = 0$ வெட்டாவிட்டால், கோளம் $S + \lambda S' = 0$, கோளம் $S = 0$ ஐயும், கோளம் $S' = 0$ ஐயும் வெட்டாது என்பதையும், λ, பல மதிப்புகள் பெறும்போது $S + \lambda S' = 0$ குறிக்கும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டா என்பதையும் எளிதில் காணலாம்.

§ 68. சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$ குறிக்கும் கோளங்களின் சமத் தொடு தளம்.

λ-ன் பல மதிப்புகளுக்குச் சமன்பாடு $S + \lambda S' = 0$ ஒரு கோளக் குடும்பத்தைக் குறிக்கின்றது. இக் குடும்பத்தின் கோளங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்து அவற்றின் சமத் தொடு தளங்களைக் காண்போம். இப்பொழுது சமன்பாடுகள்

$$S + \lambda_1 S' = 0, \quad S + \lambda_2 S' = 0$$

என்பன இக் குடும்பத்தின் இரண்டு கோளங்களைக் குறிக்கின்றன. இங்கு λ_1, λ_2-க்குச் சமமாகாது. இக் கோளங்களின் திட்டச் சமன்பாடுகள்

$$\left(\frac{1}{1+\lambda_1}\right) S + \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right) S' = 0, \quad \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_2}\right) S + \left(\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}\right) S' = 0$$

என்பன.

ஆகவே, இக் கோளங்களின் சமத்தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

$$\left[\left(\frac{1}{1+\lambda_1}\right)S+\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)S'\right] - \left[\left(\frac{1}{1+\lambda_2}\right)S+\left(\frac{\lambda}{1+\lambda_2}\right)S'\right]=0$$

ஆகும். இச் சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு சுருங்குகிறது :

$$(1+\lambda_2)(S+\lambda_1 S')-(1+\lambda_1)(S+\lambda_2 S')=0$$

அதாவது $(\lambda_2-\lambda_1)S+(\lambda_1-\lambda_2)S'=0$

அதாவது $S-S'=0.$

ஆகவே, சமன்பாடு $S-S'=0$ குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு $S+\lambda S'=0$ குறிக்கும் குடும்பத்தின் சமத்தொடு தளமாகிறது.

§69. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+3x+5y-z-7=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-7y-3z-6=0$$

குறிக்கும் கோளங்கள், குத்துக் கோளங்கள் எனக் காட்டுக.

இப்பொழுது (62·2) ஐப் பயன்படுத்துவோம். இங்கு

$$(3)(2)+(5)(-7)+(-1)(-3)=2[(-7)+(-6)].$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோளங்கள் குத்துக் கோளங்கள் ஆகும்.

கணக்கு 2. சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2=2,\ x+2y+z+2=0$$

குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளம் ஒன்று, புள்ளி $(1, 1, 1)$ வழியாகச் செல்லுகிறதென்றால், அக் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-2+\lambda(x+2y+z+2)=0$$

என்றிருக்கும். கோளம், புள்ளி $(1, 1, 1)$ வழியாகச் செல்லுவதால்

$$(1^2+1^2+1^2-2)+\lambda(1+2+1+2)=0$$

அதாவது, $1+6\lambda=0$.

அதாவது, $\lambda = -\frac{1}{6}$.

எனவே, கோளத்தின் சமன்பாடு

$$6(x^2+y^2+z^2-2)-(x+2y+z+2)=0$$

அதாவது,

$$6x^2+6y^2+6z^2-x-2y-z-14=0$$

என்ருகிறது.

கணக்கு 3. சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0$$
$$2x+y+2z+1=0$$

குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் மிகச் சிறிய கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11+\lambda(2x+y+2z+1)=0$$

என்று கொள்வோம். அதாவது,

$$x^2+y^2+z^2+(2+2\lambda)x+(4+\lambda)y+(6+2\lambda)z+(\lambda-11)=0$$

என்று கொள்வோம். அப்படியாயின், கோளத்தின் மையம்,

$$\left(-1-\lambda,\ -2-\frac{\lambda}{2},\ -3-\lambda\right)$$

ஆகும். இம் மையம், சமன்பாடு

$$2x+y+2z+1=0$$

குறிக்கும் தளத்தின் மேல் அமையும்.

ஆகவே,

$$2(-1-\lambda)+\left(-2-\frac{\lambda}{2}\right)+2(-3-\lambda)+1=0$$

அதாவது

$$(-2-2-6+1)+\lambda\left(-2-\frac{1}{2}-2\right)=0$$

அதாவது $-9-\frac{9}{2}\lambda=0$

அதாவது $\lambda=-2$.

ஆகவே, மிகச் சிறிய கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11-2(2x+y+2z+1)=0$$

அதாவது $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-11=0$

என்றாகும்.

கணக்கு 4. சமன்பாடுகள்

$$S \equiv x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z-6=0$$

$$S' \equiv x^2+y^2+z^2+3x+3y-z-1=0$$

குறிக்கும் கோளங்கள் வெட்டும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளம் ஒன்றின் ஆரம் 2 ஆனால், கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இப்பொழுது $S-S'=0$ என்பதிலிருந்து

$$x+y+z+5=0$$

என்று கிடைக்கின்றது. அதனால் கோளத்தின் வேண்டிய சமன்பாட்டை

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z-6+\lambda(x+y+z+5)=0 \quad \dots (1)$$

என்றும், அதாவது

$$x^2+y^2+z^2+(2+\lambda)x+(2+\lambda)y+(-2+\lambda)z+(-6+5\lambda)=0$$

என்றும் எழுதலாம். ஆனால், கோளத்தின் ஆரம் 2.

எனவே,

$$\left(-1-\frac{\lambda}{1}\right)^2+\left(-1-\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2-(-6+5\lambda)=2^2$$

அதாவது $\lambda^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\lambda(1+1-1-5)+(1+1+1+6-4)=0$

அதாவது $3\lambda^2-16\lambda+20=0$

அதாவது $(3\lambda-10)(\lambda-2)=0$

அதாவது $\lambda=\frac{10}{3},\quad \lambda=2.$

இம் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட, கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளுக்குரிய கோளங்கள் இரண்டு என்றும் அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+4x+4y+4=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+12x+12y+8z+44=0$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

§70. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+5x-2y+3z-3=0,$$
$$x^2+y^2+z^2+3x+4y-5z-1=0$$

குறிக்கும் கோளங்கள் குத்துக் கோளங்கள் எனக் காட்டுக.

(2) புள்ளி (0, 1, 2) ஐ மையமாகக் கொண்ட கோளம் ஒன்று, சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+3x+4y+2z-4=0$$

குறிக்கும் கோளத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது. முதல் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) புள்ளிகள் (2, 3, 1), (1, 3, 4), (2, 2, 0) வழியாகச் செல்லும் கோளமும் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+3x+3y+5z-9=0$$

குறிக்கும் கோளமும் குத்துக் கோளங்கள் என்றால், முதல் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(4) இரண்டு குத்துக் கோளங்களின் ஆரங்கள் r_1, r_2 என்பன. அவை வெட்டும் வட்டத்தின் ஆரம்

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : கோளங்களின் பொதுப் புள்ளி ஒன்றை P எனவும், கோளங்களின் மையங்களை C_1, C_2 எனவும் கொள்க, P-லிருந்து C_1, C_2-க்கு, PN என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்து, கோணம் NC_1P ஐ θ எனக் கொண்டால்,

$$\sin NC_1P=\sin\theta=\frac{NP}{r_1};$$
$$\sin NC_2P=\sin(90-\theta)=\frac{NP}{r_2}.\ ]$$

(5) சமன்பாடு $x - 2y - 2z - 7 = 0$ குறிக்கும் தளத்தை (3, −1, −1) என்ற புள்ளியில் தொடும் கோளம் ஒன்று, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - 15x + y - z + 31 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது. இக்கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(6) சமன்பாடு $3x - 2y - z + 2 = 0$ குறிக்கும் தளத்தை (3, −1, −1) என்ற புள்ளியில் தொடும் கோளம் ஒன்று, சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தைக் குத்தாக வெட்டுகிறது. இக்கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(7) சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + 2y + z + 2 = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளம் ஒன்று, புள்ளி (3, 3, 3) வழியாகச் செல்லுகிறதென்ருல், அக்கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(8) சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 2z = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 0$$

குறிக்கும் கோளங்கள் வெட்டும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளம் ஒன்றின் மையம் சமன்பாடு $x + y + z + 5 = 0$ குறிக்கும் தளத்தின் மேல் அமைந்தால் அக்கோணத்தின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

(9) சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad 2x + 2y + z - 3 = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் மிகச் சிறிய கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(10) சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \quad z = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோளத்தை, சமன்பாடு $x + 2y + 2z = 0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் வட்டத்தின் ஆரம் 3 என்ருல், கோளங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(11) ஆதி வழியாகச் செல்லும் கோளம் ஒன்று, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தை புள்ளி (1, 1, 2) இடத்துத் தொடுகிறது. இக் கோணத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோணத்தின் புள்ளி (1, 1, 2) இடத்துத் தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

$$x - 2y - 2z + 5 = 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

வேண்டிய சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 + \lambda\,(x - 2y \cdot 2z + 5 = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இச் சமன்பாட்டை ஆதியின் கூறுகள் திருப்தி செய்கின்றன.]

(12) சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தை, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u\,x + 2v'y + 2w'z + d' = 0$$

குறிக்கும் கோளம் வெட்டும் வட்டமானது, இரண்டாவது கோளத்தின் மேலுள்ள ஒரு பெரு வட்டம் என்ருல்

$$2\,(u - u')\,u' + 2\,(v - v')\,v' + 2\,(w - w')\,w' = d - d'$$

எனக் காட்டுக.

(13) சமன்பாடுகள்

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0,$$
$$P \equiv 5y + 6z + 1 = 0$$

குறிக்கும் வட்டமும், சமன்பாடுகள்

$$S' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0,$$
$$P' \equiv x + 2y - 7z = 0$$

குறிக்கும் வட்டமும் ஒரே கோளத்தின்மேல் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $S + \lambda P = 0$, $S' + \lambda' P' = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் குணகங்களை ஒப்பிட்டு λ, λ' என்பவற்றில் அமைந்த நான்கு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பெறுக. இச் சமன்பாடுகளில் இரண்டை λ-க்கும், λ'-க்கும் விடுவித்து கிடைக்கப்பட்ட மதிப்புகள் மற்ற இரண்டு சமன்பாடுகளையும் திருப்தி செய்கின்றன எனக் காட்டுக.]

விடைகள்

(3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 4 = 0$

(5) $x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 10z - 31 = 0$

(6) $7(x^2 + y^2 + z^2) - 33x + 8y + 11z + 62 = 0$

(7) $14(x^2 + y^2 + z^2 - 4) - 23(x + 2y + z + 2) = 0$

(8) $x^2 + y^2 + z^2 + 16x - 8y + 2z = 0$

(9) $3(x^2 + y^2 + z)^2 - 4x - 4y + 2z - 21 = 0$

(10) $x^2+y^2+z^2+6z-4=0$, $x^2+y^2+z^2-6z-4=0$

(11) $5(x^2 + y^2 + z^2) - 16x + 2y - 8z = 0$

§71. பொதுத் தளக் கோளங்கள் (Coaxial spheres).

ஒரு கோளக் குடும்பத்தில் எந்த இரண்டு கோளங்களும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட தளத்தையே சமத் தொடுவரைத் தளமாகக் கொண்டிருந்தால், இக் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த கோளங்கள் அனைத்தும் பொதுத் தளக் கோளங்கள் எனப்படுகின்றன. §66-ல் கண்ட சமன்பாடு

$$S + \lambda P + 0,$$

§68-ல் கண்ட சமன்பாடு

$$S + \lambda S' = 0$$

இரண்டும் இரு பொதுத் தளக் கோளத் தொகுதிகளைக் (System of coaxial spheres) குறிக்கின்றன என்பதை எளிதில் காணலாம்.

இரண்டு கோளங்களின் சமத்தொடு தளங்கள் கோளங்களின் மையத்தை இணைத்த கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் என §64-ல் கண்டோம். ஒரு பொதுத் தளக் கோளங்களின் மையங்கள் ஒரு நேர் கோட்டில் அமையும் என்று இப்பொழுது காட்டுவோம்.

இதற்காக C_1, C_2, C_3 என்ற மூன்று புள்ளிகளைத் தொகுதியைச் சேர்ந்த கோளங்களின் மையங்களாகக் கொள்வோம். அப்படியாயின்

$$C_1, C_2, \quad C_1, C_3$$

என்ற இரண்டு கோடுகளுமே தொகுதியின் பொதுச் சமத் தொடு தளத்துக்குச் செங்குத்தாய் உள்ளன. அதாவது C_1C_3, C_1C_2 உடன் இணைகின்றது.

இதுபோலவே

$$C_1 C_4,\ C_1 C_5,\ C_1 C_6\ \ldots$$

என்ற எல்லாக் கோடுகளும் $C_1 C_2$ உடன் இணைகின்றன. ஆகவே, எல்லா மையங்களும் ஒரு கோட்டில் அமைகின்றன. இக் கோடு சமத் தொடுதளத்துக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.

§72. ஒரு பொதுத் தளக் கோளங்களின் எளிய சமன்பாடு

ஒரு பொதுத் தளக் கோளங்களின் தொகுதியின் மையக் கோட்டை (line of centres) x அச்சாகவும், பொதுச் சமத்தொடு தளத்தை இம் மையக் கோடு வெட்டும் புள்ளியை ஆதியாகவும், இப் புள்ளி வழியாகச் செல்லுமாறும், சமத்தொடு தளத்தில் அமையுமாறும் உள்ள இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளை y, z அச்சுகளாகவும் கொண்டால், பொதுத் தளக் கோளங்களின் சமன்பாடு மிக எளிய வடிவில் இருக்கும். இப்பொழுது கோளங்களின் மையங்கள் x அச்சின் மேல் அமைகின்றன. ஆகவே, இம் மையங்கள்

$$(-\lambda,\ 0,\ 0)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். எனவே, கோளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^3+2\lambda x+d=0 \qquad (72\cdot 1)$$

என்றிருக்கும். இங்கு வெவ்வேறு கோளங்களுக்கு λ-ன் மதிப்பு வெவ்வேறாக இருக்கும். இப்பொழுது d எவ்விதமான எண்ணாயிருக்கும் என்று பார்ப்போம்.

இதற்காகக் குறிப்பாகச் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda_1 x+d_1=0 \qquad \ldots \qquad (72\cdot 2)$$

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda_2 x+d_2=0 \qquad \ldots \qquad (72\cdot 3)$$

குறிக்கும் தொகுதியின் கோளங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். மேலும், பொதுச் சமத் தொடுதளத்தின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இப் புள்ளி,

$$(0,\ y_1,\ z_1)$$

என்றிருக்கும். இப்புள்ளியிலிருந்து, சமன்பாடுகள் (72·2), (72·3) குறிக்கும் கோளங்களுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமாகும். ஆகவே,

$$\sqrt{0^2+y^2+z^2+2\lambda_1(0)+d_1}=\sqrt{0^2+y_1{}^2+z_1{}^2+2\lambda_2(0)+d_2}.$$

அதாவது $\qquad d_1=d_2.$

எனவே, சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0$$

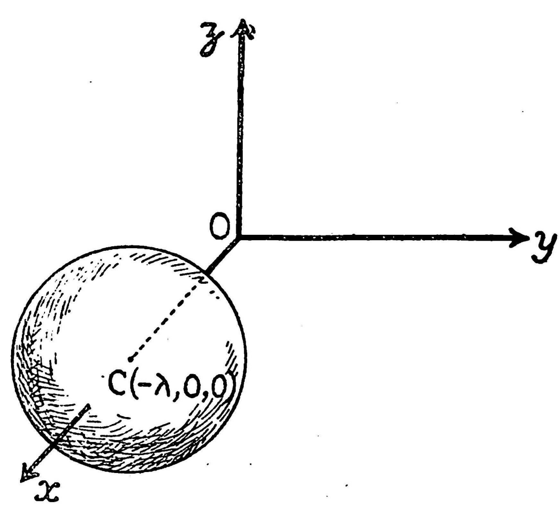
தொகுதியை சார்ந்த கோளங்கள் அனைத்தையும் குறிக்கின்றது என்றும், λ ஆனது வெவ்வேறு கோளங்களுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புடையதாக இருக்கும் என்றும், ஆனால் d ஆனது எல்லாக் கோளங்களுக்கும் ஒரே மதிப்பை உடையதாக இருக்கும் என்றும் அறிகிறோம். இங்கு λ ஆனது தொகுதியின் துணையலகு என்று வழங்கப்படுகிறது.

§ 73. ஒரு பொதுத் தளத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting points)

இங்குச் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0 \qquad \dots \quad (73\cdot 1)$$

குறிக்கும் கோளங்கள் பற்றிப் படிப்போம். இப்பொழுது λ-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்குத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு கோளத்



படம் 39.

தைப் பெறுகிறோம். இக் கோளத்தின் மையமும், ஆரமும்

$$C(-\lambda,0,0),\ \sqrt{\lambda^2-d}$$

ஆகும் (படம் 39). OC, ஆரத்தைவிடப் பெரிதாக இருந்தால், கோளம், பொதுச் சமத் தொடுதளமாகிய yOz ஐ வெட்டாது.

இங்கு $\qquad OC^2>\lambda^2-d$

அதாவது $\lambda^2 > \lambda^2 - d$

அதாவது $d > 0$

என்றிருக்கும். ஆகவே, $d > 0$ என்றிருந்தால், சமன்பாடு (73·1), ஒன்றையொன்று வெட்டாக் கோளத் தொகுதியைக் குறிக்கும். இதேபோல் $d = 0$ என்றிருந்தால், இச் சமன்பாடு ஒன்றையொன்று ஒரே புள்ளியிடத்துத் தொடும் கோளத் தொகுதியைக் குறிக்கும் என்றும், $d < 0$ என்றிருந்தால், இச் சமன்பாடு, ஒன்றையொன்று ஒரே வட்டத்தில் வெட்டும் கோளத் தொகுதியைக் குறிக்கும் என்றும் அறிகிறோம்.

குறிப்பாக $d > 0$ என்றிருந்தால், அதாவது கோளங்கள் வெட்டாக் கோளங்களாய் இருந்தால், தொகுதியில் இரண்டு கோளங்களின் ஆரங்கள் பூச்சியங்களாகும். இக் கோளங்களைத் தரும் λ-ன் மதிப்புகளை

$$\lambda^2 - d = 0$$

என்பதிலிருந்து $+\sqrt{d}$, $-\sqrt{d}$ என்று பெறுகிறோம்.

இப் புள்ளிக் கோளங்களின் (Point spheres) சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{d}\,x + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{d}\,x + d = 0$$

ஆகும். இப் புள்ளிக் கோளங்களின் மையங்கள்

$$(-\sqrt{d}, 0, 0,)\ (\sqrt{d}, 0, 0)$$

ஆகும். இவை, தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் (limiting points) என்று வழங்கப்படுகின்றன.

§ 74. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட கோளம், ஒரு பொதுத் தளத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஏதாவது ஒரு கோளம் ஆகிய இரண்டின் சமத் தொடுதளம், ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

தக்கவாறு குறியீட்டச்சுகளைக் கொண்டு, பொதுத் தளத் தொகுதியின் சமன்பாட்டை

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + d = 0$$

என்று கொள்வோம். இங்கு d, ஒரு மாறிலி. ஆனால் λ, வெவ்வேறு கோளங்களுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புக்களுடையது.

கொடுக்கப்பட்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டை

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2\,ux + 2\,vy + 2\,wz + k = 0$$

எனக் கொள்வோம். இங்கு u, v, w, k என்பன மாறிலிகள். தொகுதியின் ஏதாவதொரு கோளத்தையும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோளத்தையும் எடுத்துக் கொண்டு அவற்றின் சமத்தொடு தளத்தைக் காண்போம். அதன் சமன்பாடு

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 2\,ux + 2\,vy + 2\,wz + k)$$
$$- (x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\lambda\,x + d = 0)$$

ஆகும். அதாவது

$$(2\,ux + 2\,vy + 2\,wz + k - d) - 2\,\lambda\,x = 0$$

என்பதாகும். இங்கு λ துணையலகு. ஆகவே சமத்தொடு தளம், சமன்பாடுகள்

$$2\,ux + 2\,vy + 2\,wz + (k - d) = 0, \; x = 0$$

குறிக்கும் தளங்கள் வெட்டும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகிறது என்று கிடைக்கின்றது.

கணக்கு 2. சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2vy + 2wz - d = 0$$

ஒரு கோளக் குடும்பத்தைக் குறிக்கின்றது. இங்கு வெவ்வேறு கோளங்களுக்கு v, w இரண்டும் வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பெறுகின்றன. ஆனால், d ஒரு மாறிலி. இக் குடும்பத்தின் புள்ளிக் கோளங்களின் மையங்கள், சமன்பாடுகள்

$$y^2 + z^2 + d = 0, \; x = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தின் மேல் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

குடும்பத்தின் புள்ளிக் கோளம் ஒன்றின் மையத்தை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். ஆனால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து புள்ளிக் கோளத்தின் மையத்தை

$$(0, \; -v, \; -w)$$

என்று பெறுகிறோம். இங்கு

$$\sqrt{v^2 + w^2 + d} = 0.$$

ஆகவே,

$$x_0 = 0, \;\; y_0 = -v, \;\; z_0 = -w, \;\; v^2 + w^2 + d = 0$$

என்று பெறுகிறோம்.

அதாவது

$$x_0 = 0, \quad y_0^2 + z_0^2 + d = 0$$

என்று பெறுகிறோம். இவற்றிலிருந்து, (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$y^2 + z^2 + d = 0, \quad x = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

§75. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,vy + 2\,wz - d = 0$$

குறிக்கும் கோளம், சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\lambda\, x + d = 0$$

குறிக்கும் பொதுத் தளத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுகிறது என்று காட்டுக.

(2) சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,vy + 2\,wz - d = 0$$

குறிக்கும் கோளம், சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\lambda\, x + d = 0$$

குறிக்கும் பொதுத் தளத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு கோளத்தையும் குத்தாக வெட்டும் எனக் காட்டுக.

(3) v, w என்பன தொடர்ந்து மாறும் போது, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,vy + 2\,wz - d = 0$$

குறிக்கும் கோளங்களைக் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தின் புள்ளிக் கோளங்களின் மையங்கள், சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\lambda\, x + d = 0$$

குறிக்கும் பொதுத் தளத் தொகுதியின் பொது வட்டத்தின் மேல் அமையும் எனக் காட்டுக. இங்கு d ஒரு மாறிலி.

(4) S, S' என்ற கோளங்களின் மேலுள்ள பெரு வட்டங்களின் வழியாகச் செல்லும் கோளம், S, S' ஆகியவற்றின் மையக் கோட்டின் மேலுள்ள இரு நிலைத்த புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: மையக் கோட்டை x அச்சாகவும், S, S' ஆகிய இரண்டு கோளங்களின் சமத்தொடு தளத்தை yOz தளமாகவும் கொண்டால், S-ன் சமன்பாட்டையும், S'-ன் சமன்பாட்டையும்

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda_1 x+d_1=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda_2 x+d_2=0$$

என்று எழுதலாம். இங்கு λ_1, λ_2, d_1, d_2 என்பன மாறிலிகள். S-ன் மேலுள்ள ஒரு பெரு வட்டத்தின் வழியாகவும் S'-ன் மேலுள்ள ஒரு பெருவட்டத்தின் வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தை

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

எனக் கொள்வோம். S-ன் மையமாகிய $(-\lambda_1, 0, 0)$, சமன்பாடு

$$(x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d) - (x^2+y^2+z^2+2\lambda_1 x+d_1)=0$$

குறிக்கும் தளத்தின் மேல் அமையும். ஆகவே,

$$2\lambda_1(\lambda_1-u)-(d_1-d)=0.$$

இது போலவே,

$$2\lambda_2(\lambda_2-u)-(d_2-d)=0$$

இவற்றிலிருந்து u, d என்பன மாறிலிகள் என்றும், ஆகவே, $x^2+2ux+d=0$-ன் மூலங்கள் மாறிலிகள் என்றும் ஆகின்றன.]

7. கூம்பும், உருளையும்

§76. ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு

§50-ல் ஒரு கூம்பை வரையறுத்தோம். இங்குக் குறிப்பாக ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டின் தன்மை பற்றிப் படிப்போம். இதற்காக ஒரு ஒருபடித்தான கோவையை (Homogeneous expression) முதலில் வரையறுப்போம்.

$$f(x, y, z)$$

என்ற கோவையில், x, y, z ஆகியவற்றிற்குப் பதிலாக tx, ty, tz என்பவற்றைப் பிரதியிடக் கிடைக்கும் கோவை $f(tx, ty, tz)$ ஆனது, கோவை $t^n f(x, y, z)$-க்குச் சமமாக இருந்தால் அதாவது,

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

என்றிருந்தால், கோவை $f(x, y, z)$ ஆனது ஒரு n படி ஒருபடித்தான கோவை என்று வழங்கப்படுகிறது.

முதலில், சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$, ஒரு n படி ஒருபடித்தான சமன்பாடு ஆனுல், அது ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டுவோம். இதற்காக $P_1(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியை, சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$ குறிக்கும் இயங்குவரையின்மீது எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 40). அப்படியாயின், புள்ளி (x_1, y_1, z_1)-ன் கூறுகள், சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$ ஐத் திருப்தி செய்யும்.

எனவே, $f(x_1, y_1, z_1) = 0.$

இப்பொழுது ஆதியையும், P_1 ஐயும் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x-0}{x_1-0} = \frac{y-0}{y_1-0} = \frac{z-0}{z_1-0} = k$$

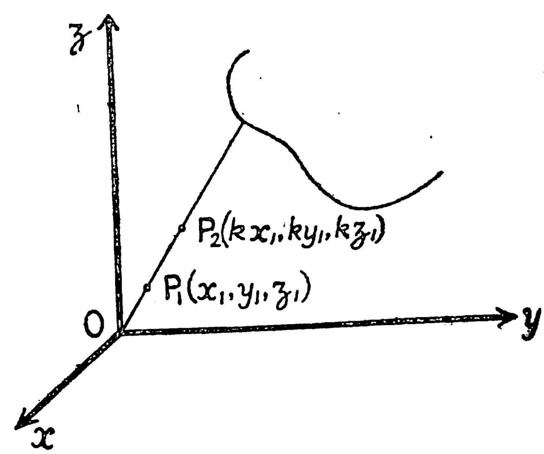
என்று எழுதலாம்.

ஆகவே, இக் கோட்டின்மீதுள்ள P_2 என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால், அதை

$$(k x_1, k y_1, k z_1)$$

என்று துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். இப் புள்ளி, சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையின் மேல் அமைகின்றதா என்று பார்ப்போம். இதற்காக. P_2-ன் கூறுகளே $f(x, y, z)$-ல் பிரதியிட்டால் கிடைப்பதாவது

$$f(kx_1, ky_1, kz_1).$$



படம் 40.

ஆனுல் $f(x, y, z)$, ஒரு n-படி ஒரு படித்தான கோவை.

ஆகவே, $$f(kx_1, ky_1, kz_1) = k^n f(x_1, y_1, z_1) = k^n (0) = 0.$$

எனவே புள்ளி P_2, சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையின் மேல் அமைகிறது. ஆனுல் P_2 என்பது கோடு OP_1 மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி. எனவே, கோடு OP_1 முழுவதுமே, சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையின்மேல் அமைகிறது என்ருகிறது. அதாவது OP_1, சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையின் ஒரு பிறப்பியாகிறது. இது போலவே ஆதியையும் சமன்பாடு குறிக்கும் இயங்கு வரையின் மேலுள்ள எப் புள்ளியையும் சேர்க்கும் கோடு முழுவதுமே, சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$ குறிக்கும் இயங்கு வரையின்மேல் அமைகிறது. அதாவது சமன்பாடு $f(x, y, z) = 0$, ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பைக் குறிக்கின்றது என்ருகிறது.

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

ஆனல், $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$,

என்ற இருபடி ஒருபடித்தான சமன்பாடு, ஆதி வழிச் செல்லும் இரண்டு தளங்களைக் குறிக்கின்றது என்று § 27-ல் கண்டோம். இங்கு ஆதியை உச்சியாகவும், ஆதிவழிச் செல்லாத இரண்டு கோடுகளைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்பாக இவ்விரு தளங்களையும் கொள்ளலாம்.

ஒரு சமன்பாடு, ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பைக் குறித்தால், இச் சமன்பாடு, ஒரு ஒருபடித்தான சமன்பாடாகும் என்பது மேலே கண்ட விளைவின் மறுதலையாகும். இப்பொழுது, ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு, ஆதி 0 ஐ உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பைக் குறிப்பதாகக் கொண்டு, அச் சமன்பாடு ஒரு ஒருபடித்தான சமன்பாடாகும் எனக் காட்டுவோம். இதற்காக சமன்பாடு,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். ஆதியின் கூறுகள் இச்சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். இதனல் $d = 0$ என்று கிடைக்கின்றது என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz = 0$$

என்ருகிறது. இப்பொழுது $P_1(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியை கூம்பின்மேல் எடுத்துக் கொண்டால், OP_1 மேலுள்ள எப் புள்ளியும் கூம்பின் மேல் அமையும். OP_1 மேலுள்ள புள்ளிகளை

$$(kx_1, ky_1, kz_1,)$$

என்று துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். இதன் கூறுகள் மேற் கண்ட சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். ஆகவே,

$$k^2(ax_1^2 + by_1^2 + bz_1^2 + 2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2hx_1y_1) + 2k(ux_1 + vy_1 + wz_1) = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இச் சமன்பாடு k-ன் எல்லா மதிப்பு களுக்கும் உண்மையாகிறது. எனவே k^2-ன் குணகமும், k-ன் குணகமும் பூச்சியமாகிறது. ஆகவே

$$ax_1z + by_1z + cz_1^2 + 2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2hx_1y_1 = 0$$

$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

அதாவது u, v, w என்ற குணகம் மூன்றும் பூச்சியம் ஆகா விட்டால், புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஆனது, சமன்பாடு

$$ux + vy + wz = 0$$

குறிக்கும் தளத்தில் அமைகின்றது என்று கிடைக்கின்றது. ஆனல் (x_1, y_1, z_1) என்பது கூம்பின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி. ஆகவே, u, v, w என்ற குணகம் மூன்றும் பூச்சியம் ஆகா விட்டால், கூம்பின் மேலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் சமன்பாடு

$$ux + vy + wz = 0$$

குறிக்கும் தளத்தில் அமையும் என்று கிடைக்கின்றது. எனவே, u, v, w என்ற மூன்று குணகமும் பூச்சியமாக வேண்டியிருக்கின்றது. அதாவது கூம்பின் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

என்ற ஒரு படித்தான சமன்பாடாகிறது.

§ 77. கூம்பின் ஒரு பிறப்பியின் திசை விகிதங்களில் ஒரு தொடர்பு காணல்

இங்கு, குறிப்பாக, ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பின் பிறப்பியின் திசை விகிதங்கள் சார்ந்த ஒரு தொடர்பைக் காண்போம். இக் கூம்பின் சமன்பாடு ஒரு படித்தான சமன்பாடாகும். இச் சமன்பாட்டை n-படிச் சமன்பாடாகிய

$$f(x, y, z) = 0$$

என்ருல்,

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

ஆகும். இப்பொழுது கூம்பின் ஏதாவதொரு பிறப்பியை எடுத்துக் கொண்டு அதன் மேல் $P_1(x_1, y_1, z_1)$ என்ற ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

பிறப்பியின் திசை விகிதங்கள்

$$\lambda, \mu, \nu$$

என்ருல், பிறப்பியின் மேலுள்ள புள்ளிகளை

$$(k\lambda, k\mu, k\nu)$$

என்று துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். ஆகையால்,

$$f(k\lambda, k\mu, k\nu) = 0$$

அதாவது $\quad k^n f(\lambda, \mu, \nu) = 0$

அதாவது $\quad f(\lambda, \mu, \nu) = 0. \quad \ldots \quad (77{\cdot}1)$

§78. ஒருபடித்தான சமன்பாடு உருவாக்கல்

இங்கு, குறிப்பாக, சமன்பாடுகள்

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \dots \quad (78\cdot1)$$

$$lx + my + nz = p \quad \dots \quad (78\cdot2)$$

குறிக்கும் வளைவு ஒன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கொண்டு, இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து, ஒரு ஒருபடித்தான சமன்பாடு கண்டு, அச் சமன்பாடு குறிக்கும் இயங்குவரைபற்றிக் காண்போம். சமன்பாடு $lx + my + nz = p$ ஐ

$$\frac{lx + my + nz}{p} = 1$$

என எழுதி, இதன் உதவியாலும், சமன்பாடு (78·1)-ன் உதவியாலும்,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fy^2 + 2g^2x + 2hxy$$

$$+ (ux + 2vy + 2wz)\left(\frac{ly+my+nz}{p}\right) + d\left(\frac{lx+my+nz}{p}\right)^2 = 0$$

என்ற ஒரு ஒருபடித்தான சமன்பாட்டை உருவாக்குவோம். இச் சமன்பாடு, ஒரு ஒருபடித்தான சமன்பாடாகையால், இஃது, ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பைக் குறிக்கின்றது. மேலும் இச் சமன்பாட்டை, சமன்பாடுகள் (78·1), (78·2) குறிக்கும் வளைவின் மேலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் திருப்தி செய்கின்றன. ஆகவே, சமன்பாடுகள் (78·1), (78·2) குறிக்கும் வளைவானது, இக் கூம்பு வளைவின் பிறப்பிக்கும் வளைவாகிறது.

§79. கூம்பின் சமன்பாடு காணல்

ஒரு வரை பரப்பின் சமன்பாடு காணும் முறையை §51-ல் கண்டோம். இங்குப் புள்ளி (x_1', y_1, z_1) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள்

$$f(x, y, z) = 0, \; ax + by + cz + d = 0$$

குறிக்கும் வளைவைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காணும் முறையைக் காண்போம்.

கூம்பின் ஒரு பிறப்பியை எடுத்துக் கொண்டு, அதன் திசை விகிதங்களை

$$\lambda, \mu, \nu$$

எனக் கொள்வோம். இப் பிறப்பி புள்ளி, (x_1, y_1, z_1) வழியாகச்

செல்லுவதால், இப் பிறப்பியின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-y_1}{\mu}=\frac{z-z_1}{\nu}$$

என்று எழுதலாம். இப்பொழுது இப் பிறப்பி, பிறப்பிக்கும் வளேவை வெட்டும் புள்ளி,

$$(x_1+\lambda k,\ y_1+\mu k,\ z_1+\nu k)$$

என்றிருக்கும். இப்புள்ளி பிறப்பிக்கும் வளேவின் மேலுள்ளதால்,

$$f(x_1+\lambda k,\ y_1+\mu k,\ z_1+\nu k)=0,$$
$$a(x_1+\lambda k)+b(y_1+\mu k)+c(z_1+\nu k)+d=0.$$

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து k ஐ நீக்கிக் கிடைக்கும் தொடர்பானது, பிறப்பி, பிறப்பிக்கும் கோட்டை வெட்டுவதற்கான நிபந்தனே யாகும். இப்பொழுது பிறப்பியின்மீது (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். அவ்வாருயின், பிறப்பியின் திசை விகிதங்களை

$$x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1$$

எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே, மேலே கண்டுள்ள நிபந்தனேயில் λ, μ, ν இவற்றிற்குப் பதிலாக

$$x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1$$

ஆகியவற்றைப் பிரதியிட்டு,

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ x_1,\ y_1,\ z_1$$

ஆகியவற்ருலும், மேலும் பிறப்பிக்கும் வளேவின் சமன்பாடுகளிலுள்ள மாறிலிகள் ஆகியவற்ருலும் கொண்ட ஒரு தொடர்பைக் காணலாம். பின் இத் தொடர்பிலிருந்து x_0, y_0, z_0 ஆகியவற்றை x, y, z என மாற்றிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காணவேண்டும்.

§ 80. பயிற்சிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. ஆதியை உச்சியாகவும், புள்ளிகள் $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தைப் பிறப்பிக்கும் வளேவாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு, புள்ளிகள் $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லுகிறது.

ஆனால் இவ் வட்டமானது

(i) (0, 0, 0), $(a, 0, 0)$ $(0, b, 0)$, வழியாகச் செல்லும் கோளத்தை,

(ii) $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ வழியாகச் செல்லும் தளம் வெட்டும் வட்டம் எனக் கொள்ளலாம்.

ஆனால் கோளம் (i). தளம் (ii) ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0 \qquad \dots \quad (1)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \dots \quad \dots \quad (2)$$

ஆகும் என்று முன்பே கண்டோம். இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் உச்சி ஆதியில் உள்ளது. ஆகவே, சமன்பாடு (2) ஐப் பயன்படுத்தி சமன்பாடு (1) ஐ ஒருபடித்தான சமன்பாடாக்கினால், கிடைக்கும் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் சமன்பாடாகும். அதாவது சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

கணக்கு 2. ஒரு நிலைத்த புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் சென்று கொண்டே நகரும் நேர் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் λ, μ, ν என்பன, $a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கு இணங்கியுள்ளன. நேர் கோடு பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நேர்கோட்டின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது

$$x_0 - x_1, \quad y_0 - y_1, \quad z_0 - z_1$$

என்பன கோட்டின் திசை விகிதங்களாகும். ஆகவே, இவை

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 = 0$$

என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கு இணங்கியிருக்கும். எனவே

$$a(x_0 - x_1)^2 + b(y_0 - y_1)^2 + c(z_0 - z_1)^2 = 0$$

என்றும் இதிலிருந்து, கூம்பின் சமன்பாடு,

$$a(x - x_1)^2 + b(y - y_1)^2 + c(z - z_1)^2 = 0$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

கணக்கு 3. ஒரு நிலைத்த புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லும் கோடு ஒன்று, சமன்பாடுகள்

$$ax^2 + by^2 - 1 = 0, \ z = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவை வெட்டிக் கொண்டே நகர்கிறது. கோடு பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கோட்டின் திசை விகிதங்களை λ, μ, ν எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் அவை மாறிலிகள் அல்ல. இப்பொழுது கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_1}{\lambda} = \frac{y - y_1}{\mu} = \frac{z - z_2}{\nu} = k$$

என்பவையாகும். இக்கோடு, சமன்பாடுகள்

$$ax^2 + by^2 - 1 = 0, \ z = 0 \qquad \dots (1)$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவை வெட்டுகிறது. இவ்வெட்டுப் புள்ளி

$$(x_1 + \lambda k, \ y_1 + \mu k, \ z_1 + \nu k)$$

என்றிருக்கும். இப்புள்ளி சமன்பாடுகள் (1) ஐத் திருப்தி செய்யுமாகையால்,

$$a(x_1 + \lambda k)^2 + b(y_1 + \mu k)^2 - 1 = 0, z_1 + \nu k = 0$$

இவற்றிலிருந்து k ஐ நீக்க,

$$a\left[x_1 + \lambda\left(-\frac{z_1}{\nu}\right)\right]^2 + b\left[y_1 + \mu\left(-\frac{z_1}{\nu}\right)^2\right] - 1 = 0$$

என்று கிடைக்கிறது.

அதாவது

$$a(\nu x_1 - \lambda z_1)^2 + b(\nu y_1 - \mu z_1)^2 - \nu^2 = 0 \qquad \dots (2)$$

என்று கிடைக்கிறது.

இப்பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டின்மீது ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு அதை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$x_0 - x_1, \quad y_0 - y_1, \quad z_0 - z$$

என்பன இக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் ஆகும். இவற்றை (2)-ல் λ, μ, ν என்பவற்றிற்குப் பதிலாகப் பிரதியிட்டால்,

$$a\{(z_0 - z_1)x_1 - (x_0 - x_1)z_1\}^2 + b\{(z_0 - z_1)y_1 - (y_0 - y_1)z_1\}^2 - (z_0 - z_1)^2 = 0$$

அதாவது $a(z_0x_1-x_0z_1)^2+b(z_0y_1-y_0z_1)^2-(z_0-z_1)^2=0$ என்று கிடைக்கின்றது. இதிலிருந்து கூம்பின் சமன்பாடு

$$a(zx_1-xz_1)^2+b(zy_1-yz)^2-(z-z_1)^2=0$$

என்ருகிறது.

§ 81. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) ஆதியை உச்சியாகவும், சமன்பாடு $y^2+z^2=b^2$ குறிக்கும் உருளையை, சமன்பாடு $x=a$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் வட்டத்தைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும், கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(2) சமன்பாடுகள் $y^2+z^2=b^2$, $x=a$ குறிக்கும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பு ஒன்றின் உச்சி ஆதியில் அமைந்துள்ளது. தளம் xOy-க்கு இணையாக உள்ள ஒரு தளம், இக் கூம்பை ஒரு அதிபரவளையில் வெட்டுகிறது எனக் காட்டுக.

(3) புள்ளி $(1, 1, 2)$-ல் உச்சியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பின் பிறப்பிக்கும் வளைவானது, சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2=6, \quad x+y+z=1$$

குறிக்கும் வட்டமானுல் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(4) புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+2ax+2by=0, \; z=0$$

குறிக்கும் வட்டத்தை பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(5) சமன்பாடுகள் $x^2+y^2+2ax+2by=0$, $z=0$ குறிக்கும் ஒரு நிலைத்த வட்டத்தைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும், ஒரு நகரும் புள்ளியை உச்சியாகவும் கொண்ட கூம்பை, yOz தளம், ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவில் வெட்டினுல், கூம்பின் உச்சியின் இயங்கு வரை சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by=0$$

குறிக்கும் கோளமாகும். எனக் காட்டுக.

(6) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \; z=0$$

குறிக்கும் ஒரு நிலைத்த நீள் வளைவைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும், ஒரு நகரும் புள்ளி உச்சியாகவும் கொண்ட ஒரு கூம்பை, yOz

தளம், ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவில் வெட்டினுல், கூம்பின் உச்சியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

எனக் காட்டுக.

(7) ஆதியை உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள்

$$f(x, y) = 0, \; z = c$$

குறிக்கும் வளைவை பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு,

$$f\left(\frac{cx}{z}, \; \frac{cy}{z}\right) = 0$$

எனக் காட்டுக.

விடைகள்

(1) $a^2(y^2 + z^2) - b^2 x^2 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - z^2 - 4xy - 6x^2 - 6y^2 + 14x + 14y + 16z - 30 = 0.$

(4) $(x_1 z - xz_1)^2 + (y_1 z - yz_1)^2 + 2a(z - z_1)(x_1 z - xz_1) + 2b(z - z_1)(y_1 z - yz_1) = 0.$

§ 82. இருபடிக் கூம்பு (Quadric Cone)

ஒரு கூம்பின் சமன்பாடு ஓர் இருபடிச் சமன்பாடானுல், அக்கூம்பு ஓர் இருபடிக் கூம்பு என்று வழங்கப்படுகின்றது.

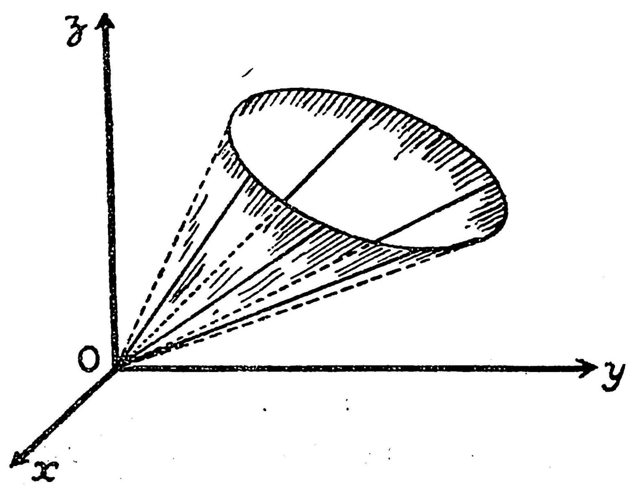
ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பின் சமன்பாடு, ஓர் ஒருபடித்தான சமன்பாடாகும் என்று முன்பே கண்டோம். இப்பொழுது ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஓர் இருபடிக் கூம்பின் தன்மையைப் படிப்போம். இதன் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும். இச் சமன்பாடு ஆறு மாறிலிகள் கொண்டிருக்கும். ஆனுல், இச் சமன்பாட்டை அவ்வாறு மாறிலிகளில் ஒன்ருல் வகுத்தால், இச் சமன்பாடு, ஒன்றுக் கொன்று தொடர்பில்லாத ஐந்து மாறிலிகள் தான் கொண்டிருக்கும். இந்த ஐந்து மாறிலிகள் தெரிந்தால், சமன்பாடு முழுவதுமே தெரிந்ததாகிவிடும்.

இப்பொழுது ஆதி வழியாகச் செல்லும் ஐந்து நேர்கோடுகள் வழியாக ஓர் இருபடிக் கூம்பு வரைய முடியும் எனக் காட்டுவோம் (படம் 41). இவ் விருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டை

$$f(x, y, z) = 0$$



படம் 41.

என்று எழுதுவோம். இதில் ஐந்து, ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத மாறிலிகள் அடங்கியிருக்கும் என்று கண்டோம். ஐந்து கோடுகளில் ஒன்றின் திசை விகிதங்கள் λ, μ, ν என்றால்

$$f(\lambda, \mu. \nu) = 0$$

என்று (77·1)–ல் கண்டோம். இதே போல், மற்ற நான்கு கோடுகளின் திசை விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி இன்னும் நான்கு தொடர்புகளைக் காணலாம். இந்த ஐந்து தொடர்களையும் விடுவித்து, ஐந்து மாறிலிகளையும் கண்டு, இந்த ஐந்து நேர்கோடுகளின் வழியாகச் செல்லும் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காணலாம்.

இது போலவே பொதுவாக, ஆதியைத் தவிர்த்து, வேறு எப் புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் ஐந்து கோடுகள் வழியாக ஓர் இருபடிக் கூம்பு வரையலாம்.

இந்த ஐந்து கோடுகளில், எம் மூன்று கோடுகளும் ஒரு தளக் கோடுகளானால், இவ்வைந்து கோடுகளின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பு, இரண்டு தளங்களாகும் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

§83. கூற்றச்சுகளின் வழியாகச் செல்லும் ஓர் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாடு

இங்கு, கூற்றச்சு மூன்றின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டின் வடிவத்தைக் காண்போம். இக் கூம்பு ஆதியை உச்சியாகக் கொண்டுள்ளது. ஆகவே இக் கூம்பின் சமன்பாடு, ஒரு இருபடி சமபடித்தான சமன்பாடாகும். ஆகவே, இச் சமன்பாட்டை

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

எனக் கொள்ளலாம். ஆனால், x அச்சின் திசைக் கொசைன்கள்

$$1, 0, 0$$

ஆகும். ஆகவே, (77·1)-ன் படி

$$a\cdot 1^2 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0^2 + 2f\cdot 0\cdot 0 + 2g\cdot 0\cdot 1 + 2h\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

அதாவது $a = 0.$

இதுபோல $b = 0$, $c = 0$ எனவும் கிடைக்கும். ஆகவே, கூற்றச்சுகளின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$fyz + gzx + hxy = 0 \qquad \ldots \quad (83\cdot 1)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும்.

§84. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பிகள்

இங்கு ஓர் இருபடிக் கூம்பு ஒன்று, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பிகளைக் கொண்டிருந்தால், அக் கூம்பின் சமன்பாட்டில்

$$(x \text{ குணகம்}) + (y \text{ குணகம்}) + (z \text{ குணகம்}) = 0$$

என்றவாறு மாறிலிகள் அமைந்திருக்கும் எனக் காட்டுவோம். இதற்காக, ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட ஓர் இருபடிக் கூம்பு ஒன்று, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பிகளைக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இக் கூம்பின் உச்சி ஆதியில் உள்ளதாலும், இக் கூம்பு ஓர் இருபடிக் கூம்பாகையாலும் இதன் சமன்பாட்டை

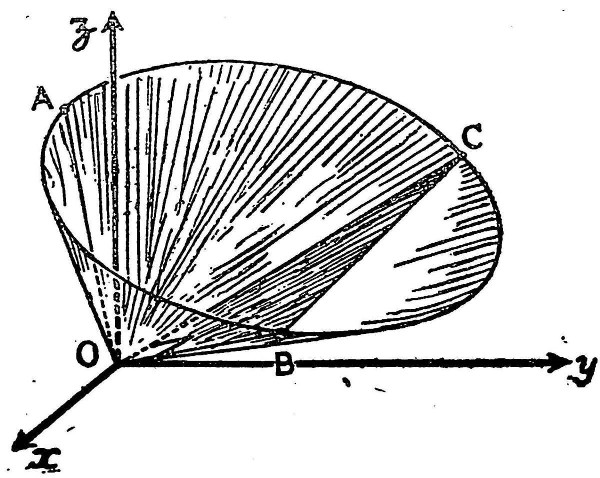
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \ldots (84\cdot 1)$$

எனக் கொள்வோம். இக் கூம்பின் OA என்ற பிறப்பிக்குச் செங்குத்தாகவும் ஆதியின் வழியாகச் செல்லுமாறும் உள்ள தளம், கூம்பை, OB, OC என்ற பிறப்பிகளில் வெட்டட்டும் (படம் 42).

OA-ன் திசைக் கொசைன்களை

$$l, m, n$$

என்று கொள்வோம். இப்பொழுது OB, OA-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. மேலும் OB, கூம்பு (84·1)-ன் ஒரு பிறப்பி. இதே



படம் 42.

போல் OC-ம், OA-க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. கூம்பு (84·1)-ன் மேலும் அமைந்துள்ளது. ஆகவே

$$\lambda, \mu, \nu$$

என்பவற்றை OB-ன் அல்லது OC-ன் திசை விகிதங்கள் என்றால்,

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0, \qquad \ldots \quad (84\cdot2)$$

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + 2f\mu\nu + 2g\nu\lambda + 2h\lambda\mu = 0. \qquad \ldots \quad (84\cdot3)$$

இச் சமன்பாடுகளில் முதற் சமன்பாட்டை ν ஆலும், இரண்டாவது சமன்பாட்டை ν^2 ஆலும் வகுத்தால்

$$d\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) + m\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + n = 0 \qquad \ldots \quad (84\cdot4)$$

$$a\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 + b\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 + c + 2f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + 2g\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) + 2h\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = 0 \qquad \ldots \quad (84\cdot5)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இவற்றை $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ என்பவற்றில் இரு சமன்பாடுகளாகக் கொண்டு, $\frac{\mu}{\nu}$ ஐ இவற்றிலிருந்து நீக்குவோம். இதற்காக (84·4)-லிருந்து

$$\frac{\mu}{\nu} = -\frac{l\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)+n}{m}$$

எனக் கண்டு, இம் மதிப்பைக் (84·5)-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது:

$$a\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 + b\left[-\frac{l\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)+n}{m}\right]^2 + c + 2f\left[-\frac{l\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)+n}{m}\right] + 2g\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) + 2h\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)\left[-\frac{l\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)+n}{m}\right] = 0.$$

அதாவது
$$m^2 a\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 + bl^2\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 + 2bln\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) + bn^2 + cm^2 - 2fml\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) - 2fmn + 2gm^2\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) - 2hml\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 - 2hnm\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) = 0$$

அதாவது
$$(am^2 + bl^2 - 2hlm)\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 + 2(bln - fml + gm^2 - hmn)\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) + (bn^2 + cm^2 - 2fmn) = 0 \quad \ldots (84{\cdot}6)$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது. இப்பொழுது OB-ன் திசை விகிதங்களை

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1$$

என்றும், OC-ன் திசை விகிதங்களை

$$\lambda_2, \mu_2, \nu_2$$

என்றும் கொண்டால்,

$$\frac{\lambda_1}{\nu_1}, \quad \frac{\lambda_2}{\nu_2}$$

என்பன இரண்டும் சமன்பாடு (84·6)-ன் மூலங்களாகும்.

இம்மூலங்களின் பெருக்கற்பலனைக் கண்டால்

$$\frac{\lambda_1}{\nu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\nu_2} = \frac{bn^2 + cm^2 - 2fmn}{am^2 + bl^2 - 2hlm} \quad \cdots \quad (84{\cdot}7)$$

என்று கிடைக்கின்றது.

இதே போல் சமன்பாடுகள் (84·4), (84·5) இரண்டிலிருந்தும் $\frac{\lambda}{\nu}$ ஐ நீக்கினால்,

$$(am^2 + bl^2 - 2hlm)\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 + 2(amn + fl^2 - gml - hln)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + (cl^2 + an^2 - 2gnl) = 0$$

என்ற சமன்பாடும், இதிலிருந்து

$$\frac{\mu_1}{\nu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\nu_2} = \frac{cl^2 + an^2 - 2gnl}{am^2 + bl^2 - 2hlm} \quad \cdots \quad (84{\cdot}8)$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

இப்பொழுது OB, OC-க்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே,

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = 0$$

இத் தொடர்பை $\nu_1\nu_2$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{\lambda_1}{\nu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\nu_2} + \frac{\mu_1}{\nu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\nu_2} + 1 = 0$$

என்றும், இதில் (84·7) ஐயும், (84·8) ஐயும் பயன்படுத்த

$$\frac{bn^2 + cm^2 - 2fmn}{am^2 + bl^2 - 2hlm} + \frac{cl^2 + an^2 - 2gnl}{am^2 + bl^2 - 2hlm} + 1 = 0$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

அதாவது

$$(bn^2 + cm^2 - 2fmn) + (cl^2 + an^2 - 2gnl) + (am^2 + bl^2 - 2hlm) = 0$$

அதாவது,

$$a(m^2 + n^2) + b(n^2 + l^2) + c(l^2 + m^2) - 2fmn - 2gnl - 2hlm = 0 \quad \ldots \quad (84{\cdot}9)$$

ஆனால் பிறப்பி OA-ன் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n.

ஆகவே,

$$al^2 + bm^2 + cn^2 + 2fmn + 2gnl + 2hlm = 0 \quad \ldots \quad (84{\cdot}10)$$

இப்பொழுது $(84{\cdot}9)$ ஐயும், $(84{\cdot}10)$ ஐயும் கூட்டக் கிடைப்பதாவது :

$$a(l^2 + m^2 + n^2) + b(l^2 + m^2 + n^2) + c(l^2 + m^2 + n^2) = 0$$

அதாவது $(a + b + c)(l^2 + m^2 + n^2) = 0.$

அதாவது $a + b + c = 0.$ ... $(84{\cdot}11)$

ஆகவே, கூம்பு $(84{\cdot}1)$, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பிகளைக் கொண்டிருந்தால்

$$a + b + c = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

மறுதலையாகச் சமன்பாடு $(84{\cdot}1)$-ல்

$$a + b + c = 0$$

என்றிருந்தால், AO என்ற எந்தப் பிறப்பியை எடுத்துக் கொண்டாலும், OB, OC என்ற பிறப்பிகளை, OA, OB, OC மூன்றும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளவாறு காணலாம் என்று எளிதில் நிறுவலாம்.

மேலும், சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பிகளைக் கொண்டிருந்தால்,

$$a + b + c = 0$$

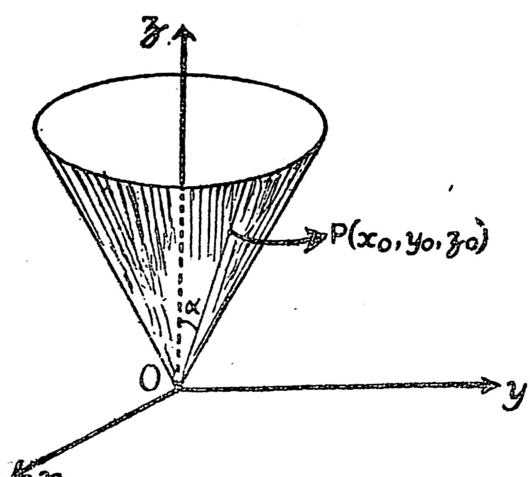
எனக் கிடைக்கும் என்று, ஆதியைக் கூம்பின் உச்சிக்கு மாற்றிக் காணலாம்.

§ 85. நேர் வட்டக் கூம்பு (Right circular cone)

ஒரு நிலைத்த கோட்டின் மேலுள்ள நிலைத்த புள்ளி ஒன்றின் வழியாகச் சென்றுகொண்டே, ஒரு கோடு நிலைத்த கோட்டைப் பொறுத்துச் சுழல்கின்றது. நிலைத்த கோட்டுக்கும், சுழலும் கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ஒரு மாறிலிக் கோணமானால், சுழலும் கோடு பிறப்பிக்கும் கூம்பு ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பு எனப்படும். நிலைத்த கோடு, இக் கூம்பின் அச்சு என்றும், மாறிலிக் கோணம், அரை உச்சிக் கோணம் (semi-vertical angle) என்றும் வழங்கப்படுகின்றன.

§ 86. ஆதியை உச்சியாகவும், z அச்சை அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் சமன்பாடு

இங்கு ஆதியை உச்சியாகவும், z அச்சை அச்சாகவும், α ஐ அரை உச்சிக் கோணமாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக்



படம் 43.

காண்போம் (படம் 43). $P(x_0, y_0, z_0)$ என்பது இக் கூம்பின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி என்றால்,

$$x_0, y_0, z_0$$

என்பன, பிறப்பி OP-ன் திசை விகிதங்களாகும்.

ஆனால், z அச்சின் திசை விகிதங்கள்

$$0, 0, 1.$$

மேலும், OP-க்கும், z அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் α.

எனவே,

$$\cos^2 \alpha = \frac{(x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 + z_0 \cdot 1)^2}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(0^2 + 0^2 + 1^2)}.$$

அதாவது $\sec^2 \alpha = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{z_0^2}$

அதாவது $z_0^2 \sec^2 \alpha = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$

அதாவது $z_0 (\sec^2 \alpha - 1) = x_0^2 + y_0^2$

அதாவது $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 \tan^2 \alpha = 0.$

எனவே, கூம்பின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0 \qquad \dots \quad (86 \cdot 1)$$

என்றாகிறது.

§87. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. கூற்றச்சுகள் வழியாகவும், திசை விகிதங்கள்,

$$1, 2, -2; \ 1, 1, -3$$

கொண்டனவாகவும், ஆதி வழியாகச் செல்லுமாறும், உள்ள இரண்டு கோடுகள் வழியாகவும் செல்லும் ஓர் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கூற்றச்சுகளின் வழியாகச் செல்லும் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$fyz + gzx + hxy = 0$$

என்றிருக்கும். இக் கூம்பு, திசை விகிதங்கள் $1, 2, -2$ கொண்ட கோட்டின் வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$(f)(2)(-2) + (g)(-2)(1) + (h)(1)(2) = 0$$

அதாவது $-4f - 2g + 2h = 0$

அதாவது $2f + g - h = 0 \qquad \dots \quad (1)$

மேலும் கூம்பு, திசை விகிதங்கள் $1, 1, -3$ கொண்ட கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகிறது.

எனவே, $(f)(1)(-3) + (g)(-3)(1) + (h)(1)(1) = 0$

அதாவது $-3f - 3g + h = 0$

அதாவது $3f + 3g - h = 0. \qquad \dots \quad (2)$

இப்பொழுது (1)-லிருந்தும், (2)-லிருந்தும் கிடைப்பதாவது:

$$\frac{f}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ +3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-g}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{h}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}$$

அதாவது $\frac{f}{+2} = \frac{-g}{1} = \frac{h}{3}$

அதாவது $\frac{f}{2} = \frac{g}{-1} = \frac{h}{+3} = k$

எனவே,

$f = 2k,\ g = -k,\ h = +3k.$ ஆகவே, கூம்பின் சமன்பாடு

$$2kyz - kzx + 3kxy = 0$$

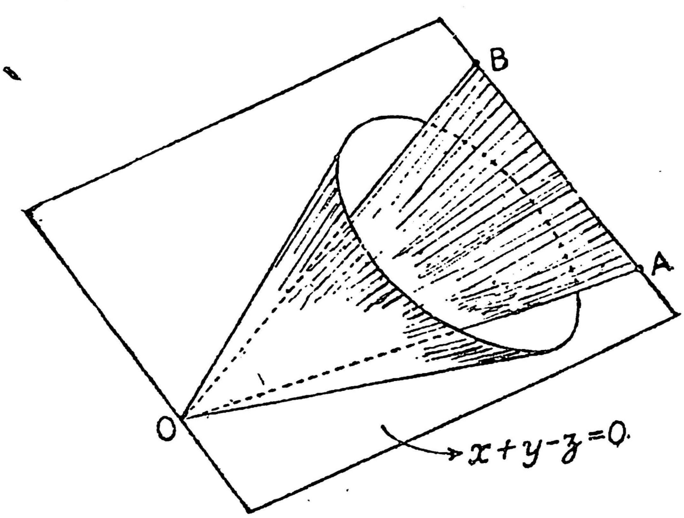
அதாவது $2yz - zx + 3xy = 0$ ஆகும்.

கணக்கு 2. சமன்பாடு

$$2yz - zx - 2xy = 0$$

குறிக்கும் கூம்பை, சமன்பாடு,

$$x + y - z = 0$$



படம் 44.

குறிக்கும் தளம் வெட்டும் இரு கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

கூம்பைத் தளம் வெட்டும் கோடுகளுக்கு OA, OB எனப் பெயரிடுவோம் (படம் 44). மேலும், OA-ன் திசை விகிதங்களை

$$\lambda, \mu, \nu$$

எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது OA, கூம்பின் ஒரு பிறப்பி. ஆனால், கூம்பின் சமன்பாடு

$$2yz - zx - 2xy = 0$$

ஆகவே, $2\mu\nu - \nu\lambda - 2\lambda\mu = 0$ ... ... (1)

கோடு OA, சமன்பாடு

$$x + y - z = 0$$

குறிக்கும் தளத்தின் மேலும் உள்ளது. ஆகவே, இக்கோடு தளத்தின் செங் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். ஆனால், செங் கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$1, 1, -1$$

ஆகும். ஆகவே,

$$(\lambda)(1) + (\mu)(1) + (\nu)(-1) = 0. \quad \ldots \quad (2)$$

இப்பொழுது தொடர்பு (1)ஐ, ν^2 ஆலும், தொடர்பு (2)ஐ ν ஆலும் வகுக்க,

$$2\left(\frac{\mu}{\nu}\right) - \left(\frac{\lambda}{\nu}\right) - 2\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = 0, \quad \ldots \quad (3)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) + \left(\frac{\mu}{\nu}\right) - 1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இத் தொடர்புகளை

$$\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}$$

ஆகியவற்றில் இரண்டு சமன்பாடுகளாகக் கொண்டு, $\frac{\lambda}{\nu}$ ஐ இவற்றிலிருந்து நீக்கக் கிடைப்பதாவது

$$2\left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) - \frac{\lambda}{\nu} - 2\frac{\lambda}{\nu}\left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) = 0$$

அதாவது,

$$2\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 - 5\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) + 2 = 0$$

அதாவது,

$$\left(\frac{\lambda}{\nu} - 2\right)\left(2\frac{\lambda}{\nu} - 1\right) = 0$$

அதாவது $\frac{\lambda}{\nu} = 2$ அல்லது $\frac{1}{2}$.

இப்பொழுது $\frac{\lambda}{\nu} = 2$ என்பதை எடுத்துக் கொண்டால், இம் மதிப்பைச் சார்ந்த $\frac{\mu}{\nu}$-ன் மதிப்பை, (4)-லிருந்து,

$$\frac{\mu}{\nu} = 1 - \frac{\lambda}{\nu} = 1 - 2 = -1$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது $\lambda = 2\nu$, $\mu = -\nu$ என்று பெறுகிறோம். இதிலிருந்து,

$$\lambda : \mu : \nu = 2\nu : -\nu : 1\nu = 2 : -1 : 1$$

என்று பெறுகிறோம். இதுபோலவே $\frac{\lambda}{\nu} = +\frac{1}{2}$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{\mu}{\nu} = 1 - \frac{\lambda}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

என்று பெறுகிறோம். அதாவது $\lambda = \frac{1}{2}\nu$, $\mu = \frac{1}{2}\nu$ என்று பெறுகிறோம். இதிலிருந்து,

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{1}{2}\nu : \frac{1}{2}\nu : \nu = 1 : 1 : 2$$

என்று பெறுகிறோம். இப்பொழுது திசை விகிதங்களின் இரண்டு கணங்களைப் பெற்றுள்ளோம். இக் கணங்களில் ஒன்று, OA-ன் திசை விகிதங்கள், மற்றொன்று OB-ன் திசை விகிதங்கள் ஆகும். இத் திசை விகிதங்கள்

$$2, -1, 1;\ 1, 1, 2.$$

ஆகவே, OA, OB இரண்டுக்கும் இடையிலுள்ள கோணமாவது

$$\cos^{-1}\frac{(2)(1) + (-1)(1) + (1)(2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{3}{6}$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= 60^\circ.$$

கணக்கு 3. $bc + ca + ab = 0$ என்றால், சமன்பாடு

$$yz + zx + xy = 0$$

குறிக்கும் கூம்பை, சமன்பாடு

$$ax + by + cz = 0$$

குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கோடுகள் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

முந்திய கணக்கில் கண்டவாறு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் திசை விகிதங்களைக் கண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனை

$bc + ca + ab = 0$ ஐப் பயன்படுத்தி, இக் கோடுகள் செங்குத்தானவை எனக் காட்டலாம்.

இப்பொழுது வேறொரு முறையில் இக் கணக்கைச் செய்வோம். சமன்பாடு $ax + by + cz = 0$ குறிக்கும் தளத்தின் ஆதி வழிச் செல்லும் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$a, \; b, \; c.$$

ஆனால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனை $bc + ca + ac = 0$ இதிலிருந்து, இச் செங்கோடு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் ஒரு பிறப்பி எனத் தெரிகிறது. இப் பிறப்பியை l_1 எனவும், தளம் கூம்பை வெட்டும் கோடுகளான பிறப்பிகளை l_2, l_3 எனவும் கொள்வோம்.

கூம்பின் சமன்பாட்டில்,

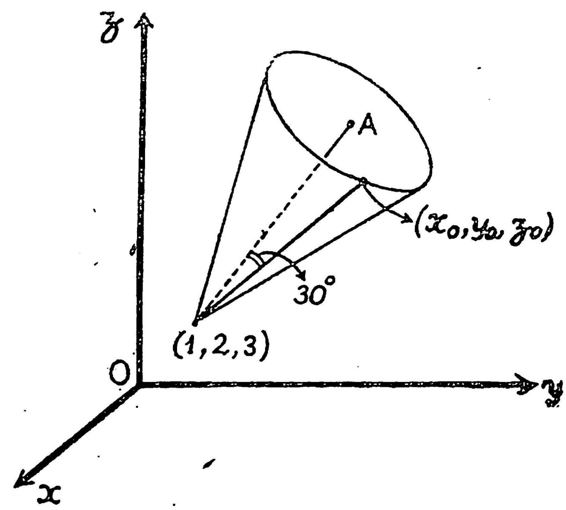
$$(x^2 \text{ குணகம்}) + (y^2 \text{ குணகம்}) + (z^2 \text{ குணகம்}) = 0$$

என்றிருப்பதைக் காண்கிறோம். ஆகவே, கூம்பின் எம் மூன்று பிறப்பிகளிலும் இரண்டு, மூன்றாவதுக்குச் செங்குத்தானால், முதல் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும். இப்பொழுது பிறப்பிகள் l_2, l_3 இரண்டும் பிறப்பி l_1-க்குச் செங்குத்தானவை. ஆகவே, l_2, l_3 இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

கணக்கு 4. புள்ளி (1, 2, 3) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள் $x = y = z$ குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையான கோட்டை அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் 30° என்றால், கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க (படம் 45).

$P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை கூம்பின் மேல் எடுத்துக்கொள்வோம். கூம்பின் அச்சை OA எனப் பெயரிட்டால்

$$P\hat{O}A = 30^\circ.$$



படம் 45.

ஆனால், OP, OA இரண்டின் திசை விகிதங்கள்

$$x_0 - 1, \quad y_0 - 2, \quad z_0 - 3; \quad 1, 1, 1$$

ஆகும். ஆகவே.

$$\cos 30^\circ = \frac{(x_0 - 1)\cdot 1 + (y_0 - 2)\cdot 1 + (z_0 - 3)\cdot 1}{\sqrt{(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 + (z_0-3)^2}\ \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$$

அதாவது,

$$\frac{3}{4} = \frac{(x_0 + y_0 + z_0 - 6)^2}{\{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 + (z_0 - 3)^2\}(3)}$$

அதாவது,

$$9\{(x_0-1)^2 + (y_0-2)^2 + (z_0-3)^2\} = 4(x_0 + y_0 + z_0 - 6)^2$$

அதாவது,

$$5x_0^2 + 5y_0^2 + 5z_0^2 - 8x_0y_0 - 8x_0z_0 - 8y_0z_0 + 30x_0 + 12y_0 - 6z_0 - 18 = 0$$

ஆகவே நேர் வட்டக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$5x^2+5y^2+5z^2-8xy-8xz-8yz+30x+12y-6z-18=0$$

என்றாகிறது.

§ 88. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரண்டு கோடுகளின் திசை விகிதங்கள் 2, 4, 1 ; 3, 3, 1. இக்கோடுகள் வழியாகவும், கூற்றச்சுகளின் வழியாகவும் செல்லும் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(2) கூற்றச்சுகளும், சமன்பாடுகள்

$$(gh'-g'h)x=(hf'-hf)y=(fg'-f'g)z$$

குறிக்கும் கோடும் ஆகிய நான்கு கோடுகள், சமன்பாடுகள்

$$fyz+gzx+hxy=0, \quad f'yz+g'zx+h'xy=0$$

குறிக்கும் கூம்புகள் இரண்டுக்கும், பொதுவாக உள்ள பிறப்பிகள் ஆகும் எனக் காட்டுக.

(3) கூற்றச்சுகளையும், சமன்பாடுகள்

$$6x=3y=2z, \quad x=y=z$$

குறிக்கும் கோடுகளையும் பிறப்பிகளாகக் கொண்ட இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(4) சமன்பாடு $2yz-3zx-6xy=0$ குறிக்கும் கூம்பை, சமன்பாடு $x+y+z=0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோளத்தைக் காண்க.

(5) சமன்பாடு $x^2+y^2-5z^2=0$ குறிக்கும் கூம்பை, சமன்பாடு $x-y+z=0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க,

(6) சமன்பாடு $x^2+y^2-5z^2=0$ குறிக்கும் கூம்பை, சமன்பாடு $x-y+z=0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கோடுகள் வழியாகவும், கூற்றச்சுகளின் வழியாகவும் செல்லும் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(7) $gh+hf+fg=0$ என்றால்,

சமன்பாடு $fyz+gzx+hxy=0$ குறிக்கும் கூம்பை, சமன்பாடு $x+y+z=0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் $60°$ எனக் காட்டுக.

(8) ஆதியிலிருந்து r தூரத்திலுள்ள ஒரு தளம், சமன்பாடு $x^2 + y^2 + z^2 = 3r^2$ குறிக்கும் கோளத்தை வெட்டும் வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பு ஒன்றின் உச்சி ஆதியில் உள்ளது. இக் கூம்பு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக மூன்று பிறப்பிகளை உடையது எனக் காட்டுக.

(9) $(b-c)\,l^2 + (c-a)\,m^2 + (a-b)n^2 = 0$ என்றால், சமன்பாடு

$$(b-c)\,x^2 + (c-a)\,y^2 + (a-b)\,z^2 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பை, சமன்பாடு $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கோடுகள் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

(10) சமன்பாடு $5\,yz - 8\,zx - 3\,xy = 0$ குறிக்கும் கூம்பின் மூன்று பிறப்பிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. அவற்றின் ஒன்றின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

என்றால், மற்ற இரண்டு பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : தளம் $x + 2y + 3z = 0$, கூம்பை வெட்டும் கோடுகள் இரண்டாவது, மூன்றாவது பிறப்பிகளாகும்.]

(11) கூற்றச்சுகளின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு இருபடிக் கூம்பு, சமன்பாடு $lx + my + nz = 0$ குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

குறிக்கும் கூம்பை வெட்டும் கோடுகளின் வழியாகவும் செல்லுகிறது. இக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$l\,(bn^2 + cm^2 - 2fmn)\,yz + m\,(cl^2 + an^2 - 2gnl)\,zx \\ + n\,(am^2 + bl^2 - 2hlm)\,xy = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : கூம்பின் சமன்பாடு, ஒரு இருபடி ஒருபடித் தான சமன்பாடாகும். ஆகவே, இது

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \\ + (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,(lx + my + nz) = 0$$

என்றிருக்கும். கூம்பு கூற்றச்சுகளின் வழியாகச் செல்லுவதால், x^2-ன் குணகம் $=$ y^2-ன் குணகம் $=$ z^2-ன் குணகம் $= 0$.]

(12) சமன்பாடுகள் $xy-3yz+3zx=0$, $2xy+yz-4zx=0$ குறிக்கும் கூம்புகள் வெட்டும் கோடுகள் வழியாகவும், சமன்பாடு $x=y=z$ குறிக்கும் கோட்டின் வழியாகவும் செல்லும் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : வேண்டிய சமன்பாட்டை

$f(x, y, z) = (xy-3yz+3zx) + \lambda(2xy+yz-4zx) = 0$

எனக் கொள்க. சமன்பாடுகள் $x=y=z$ குறிக்கும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் 1, 1, 1. ஆகவே, $f(1, 1, 1) = 0$ அதாவது $\lambda = 1$.]

(13) ஆதியை உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$$

குறிக்கும் கோட்டை அச்சாகவும், α ஐ அரை உச்சிக் கோணமாகவும் கொண்ட நேர் வட்டக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(14) ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் மூன்று பிறப்பிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானுல், கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் $\tan^{-1}\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : சமன்பாடு (86·1)-ல் x, y, z ஆகியவற்றின் குணகங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியத்திற்குச் சமம்.]

(15) புள்ளி (1, 1, 1) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள் $x=y=z$ குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையாக உள்ள ஒரு கோட்டை அச்சாகவும் கொண்ட நேர் வட்டக் கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் $60°$ என்ருல், கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(16) சமன்பாடுகள்

$$x=y=z, \quad 2x=-5y=3z$$

குறிக்கும் கோடுகளை முறையே அச்சாகவும், ஒரு பிறப்பியாகவும் கொண்ட நேர் வட்டக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்

$$1, 1, 1; \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$$

ஆகும்.

ஆகவே, கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் α என்றால்,

$$\cos\alpha = \frac{(1)\left(\frac{1}{2}\right)+(1)\left(-\frac{1}{5}\right)+(1)\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}$$

(17) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{v};\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

குறிக்கும் கோடுகளில் முதற் கோட்டை, இரண்டாவது கோட்டைப் பொறுத்துச் சுழற்றிக் கிடைக்கும் நேர் வட்டக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(18) புள்ளி (1, 2, 3) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள் $x=y=z$ குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையான கோட்டை அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் பிறப்பி ஒன்றின் திசை விகிதங்கள் 1, 0, −2 என்றால், கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(19) புள்ளி (1, 2, 3) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடுகள் $x-1=y-2=z-3$ குறிக்கும் கோட்டை அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் பிறப்பி ஒன்று, புள்ளி (2, 2, 1) வழியாகச் சென்றால், கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $yz+2zx-xy=0$ (3) $yz-4zx+3xy=0$

(4) 60° (5) 60° (6) $2yz-2zx-xy=0$

(10) $\frac{x}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$

(12) $3xy-2yz-zx=0$

(13) $\cos^2\alpha\,(\lambda^2+\mu^2+v^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(\lambda x+\mu y+vz)^2$

(15) $(x^2+y^2+z^2+8xy+8yz+8zx-18x$
$-18y-18z+27=0$

(16) $xy + yz + zx = 0$

(17) $(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(ax + by + cz)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(a\lambda + b\mu + c\nu) = 0$

(18) $5(x+y+z-6)^2 = (x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14)$

(19) $5(x+y+z-6)^2 = (x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14)$.

§89. உருளை

§50-ல் ஓர் உருளையை வரையறுத்தோம். இங்கு, ஒரு குறிப்பிட்ட திசையைப் பிறப்பிக்கும் வளைவையும், ஒரு குறிப்பிட்ட திசையைப் பிறப்பிகளின் திசையாகவும் எடுத்துக் கொண்டு, இவை சார்ந்த உருளையின் சமன்பாட்டைக் காணும் முறையைக் காண்போம்.

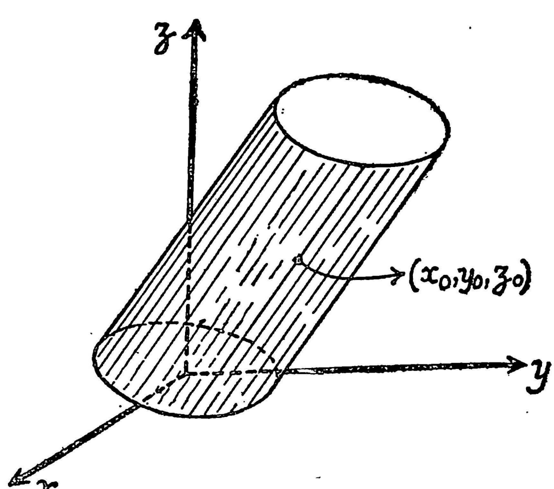
இதற்காகச் சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad z = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும்,

$$\lambda, \mu, \nu$$

என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகவும் கொண்ட திசையைப் பிறப்பிகளின் திசையாகவும் கொள்வோம் (படம் 46).



படம் 46.

உருளையின்மேல் (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். உருளையின் பிறப்பிகளின் திசை விகிதங்கள்

λ, μ, ν ஆகையால், (x_0, y_0, z_0) வழியாகச் செல்லும் பிறப்பியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_0}{\lambda} = \frac{y-y_0}{\mu} = \frac{z-z_0}{\nu}$$

ஆகும். எனவே, இப் பிறப்பி பிறப்பிக்கும் வளைவை வெட்டும் புள்ளியை

$$(x_0 + \lambda k,\ y_0 + \nu k,\ \ z_0 + \nu k)$$

எனக் கொள்ளலாம். இப் புள்ளி, சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\ z = 0$$

இரண்டையும் திருப்தி செய்கின்றன.

ஆகவே, $$(x_0 + k\lambda)^2 + (y_0 + \mu k)^2 + (z_0 + \nu k)^2 - 1 = 0,\ z_0 + \nu k = 0.$$

இவற்றிலிருந்து k ஐ நீக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\left\{x_0 + \lambda\left(\frac{-z_0}{\nu}\right)\right\}^2 + \left\{y_0 + \mu\left(\frac{-z_0}{\nu}\right)\right\}^2 + (0)^2 - 1 = 0$$

அதாவது $$(\nu x_0 - \lambda z_0)^2 + (\nu y_0 - \mu z_0)^2 - \nu^2 = 0.$$

இங்கு λ, μ, ν என்பன மாறிலிகள். ஆகவே, உருளையின் சமன்பாடு

$$(\nu x - \lambda z)^2 + (\nu y - \mu z)^2 - \nu^2 = 0$$

என்றாகின்றது.

§ 90. நேர்வட்ட உருளை (Right circular cylinder)

ஓர் உருளையின் பிறப்பிக்கும் வளைவு ஒரு வட்டமாகவும், உருளையின் பிறப்பிகள், இவ் வட்டம் அமையும் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் இருந்தால், உருளை ஒரு நேர் வட்ட உருளை என வழங்கப்படுகின்றது. இங்குப் பிறப்பிக்கும் வளைவான வட்டத்தின் மையமாகச் செல்லுமாறும், பிறப்பிகளுக்கு இணையாக உள்ளவாறும் உள்ள நேர்கோடு, உருளையின் அச்சு என்று வழங்கப்படுகிறது.

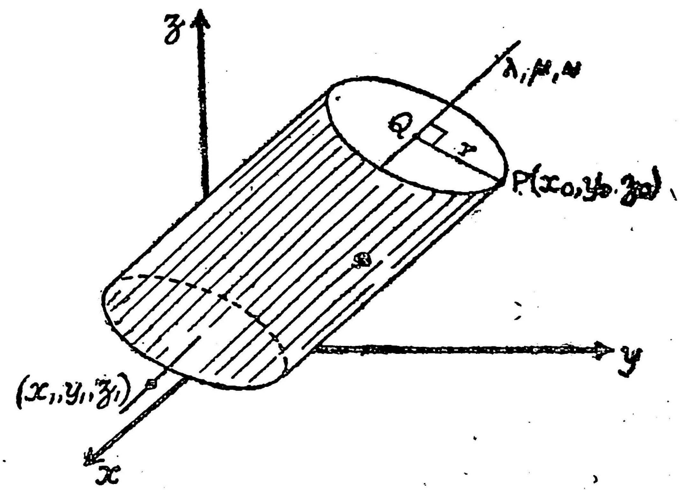
இப்பொழுது சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda} = \frac{y-y_1}{\mu} = \frac{z-z_1}{\nu}$$

குறிக்கும் கோட்டை அச்சாகவும், r ஐ ஆரமாகக் கொண்ட வட்டம் ஒன்றைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும் கொண்ட உருளை

யின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 47).

உருளையின்மேல் $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்



படம் 47.

கொள்வோம். P-லிருந்து உருளையின் அச்சுக்கு PQ என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைந்தால்,

$$PQ = r.$$

ஆனால், வினாவு (38·2)-லிருந்து

$$PQ^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - \frac{\{\lambda(x_0 - x_1) + \mu(y_0 - y_1) + \nu(z_0 - z_1)\}^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆகவே,

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - \frac{\{\lambda(x_0 - x_1) + \mu(y_0 - y_1) + \nu(z_0 - z_1)\}^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = r^2$$

என்றும், இதிலிருந்து உருளையின் சமன்பாடு

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - \frac{\{\lambda(x - x_1) + \mu(y - y_1) + \nu(z - z_1)\}^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = r^2$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

§ 91. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0, \quad z = 0$ குறிக்கும் வளைவைப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகவும், சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$$

குறிக்கும் கோட்டுக்கு இணையான பிறப்பிகளையும் கொண்ட உருளையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(2) சமன்பாடு

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$$

குறிக்கும் கோட்டை அச்சாகக் கொண்ட ஒரு நேர் வட்ட உருளையின் பிறப்பிக்கும் வட்டத்தின் ஆரம் 3 என்றால், சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) புள்ளிகள் (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தைப் பிறப்பிக்கும் வட்டமாகக் கொண்ட உருளையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $a(\nu x - \lambda z)^2 + 2h(\nu x - \lambda z)(\nu y - \mu z) + b(\nu y - \mu z)^2 + c\nu^2 = 0$

(2) $x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xz - 10x - 20y - 20z = 0$

(3) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 1 = 0.$

§ 92. ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு ஒரு கூம்பைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனை

சமன்பாடு

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \dots \quad (92\cdot1)$$

ஒரு கூம்பைக் குறிக்கின்றது எனக் கொள்வோம். இக் கூம்பின் உச்சி $A(x_1, y_1, z_1)$ எனவும் கொள்வோம். இப்பொழுது ஆதியைக் கூம்பின் உச்சிக்கு மாற்றி, புதுக் கூற்றச்சுகளை

AX, AY, AZ எனக் கொண்டால் கூம்பின் புது அச்சுகளைப் பொறுத்த சமன்பாடு

$$a(X+x_1)^2+b(Y+y_1)^2+c(Z+z_1)^2+2f(Y-y_1)(Z+z_1)$$
$$+2g(Z+z_1)(X+x_1)+2g(X+x_1)(Y+y_1)+2u(X+x_1)$$
$$+2v(Y+y_1)+2w(Z+z_1)+d=0$$

ஆகும். இச் சமன்பாடு ஒருபடித்தான சமன்பாடாக இருக்க வேண்டும். ஆகவே, X-ன் குணகம், Y-ன் குணகம், Z-ன் குணகம், மாறிலி உறுப்பு ஆகியவை பூச்சியத்துக்குச் சமமாக வேண்டும். ஆகவே,

$$ax_1+hy_1+gz_1+u=0 \quad \ldots \quad (92\cdot2)$$

$$hx_1+by_1+fz_1+v=0 \quad \ldots \quad (92\cdot3)$$

$$gx_1+fy_1+cz_1+w=0 \quad \ldots \quad (92\cdot4)$$

$$f(x_1\, y_1\, z_1)=0 \quad \ldots \quad (92\cdot5)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இவற்றில் (92·5) ஐ

$$(ax_1+hy_1+gz_1+u)x_1+(hx_1+by_1+fz_1+v)y_1$$
$$+(gx_1+fy_1+cz_1+w)z_1+(ux_1+vy_1+wz_1+d)=0$$

என்று எழுதினால் இது (92·2), (92·3), (92·4), ஆகியவற்றால்

$$ux_1+vy_1+wz_1+d=0 \quad \ldots \quad (94\cdot6)$$

என்று சுருங்குகிறது. இப்பொழுது (92·2), (93·3), (92·4) (92·6) என்ற தொடர்புகளிலிருந்து x_1, y_1, z_1 ஆகியவற்றை நீக்க,

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix}=0 \quad \ldots \quad (92\cdot7)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இதன் மறுதலையும் உண்மையானது என்று நிறுவ முடியும்.

கூம்பின் உச்சியைக்காண, தொடர்புகள் (92·2), (92·3), (92·4), (92·6) ஆகியவற்றில் ஏதாவது மூன்றை x_1, y_1, z_1 ஆகியவற்றிற்கு விடுவிக்க வேண்டும். இப்பொழுது $f(x, y, z)$ ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு t ஐப் பயன்படுத்தி ஒரு படித்தான கோவையாக எழுதி அதை $F(x, y, z, t)$ எனக் குறித்தால்,

அதாவது
$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,fyz + 2\,gzx + 2\,hxy + (2\,ux + 2\,vg + 2\,wz)\,t + d\,t^2.$$

எனக் கொண்டால்,
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{t=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{t=1} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{t=1} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=1} = 0$$

என்பவை தொடர்புகள் (92·2), (92·3), (92·4), (92·6) போன்றிருப்பதை எளிதில் காணலாம்.

ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு குறிக்கும் கூம்பின், ஒரு புள்ளியிடத்துத் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டையும், இக் கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் (reciprocal cone) சமன்பாட்டையும் § 108-லும், அதற்கு அடுத்தும் படிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு :

சமன்பாடு
$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz + 2zx + 6xy - 12x - 10y - 10z + 21 = 0$$

ஒரு கூம்பைக் குறிக்கிறது எனக் காட்டுக. அதன் உச்சியையும் காண்போம்.

இங்கு $F = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4yz + 2zx + 6xy + (-12x - 10y - 10z)\,t + 21t^2$

ஆகும். மேலும்,
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{t=1} = 2x + 2z + 6y - 12 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{t=1} = -4y + 4z + 6x - 10 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{t=1} = 2z + 4y + 2x - 10 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=1} = -12x - 10y - 20z + 42 = 0.$$

இந் நான்கு சமன்பாடுகளில் முதல் மூன்றை விடுவிக்க $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ என்று கிடைக்கின்றது. இம் மதிப்புகள் நான்காவது சமன்பாட்டையும் திருப்தி செய்வதை எளிதில்

காணலாம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு ஒரு கூம்பைக் குறிக்கின்றது என்றும், அக்கூம்பின் உச்சி (1, 1, 2) என்றும் கிடைக்கின்றது.

§ 93. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2yz+4zx+4xy-6x-6y-6z+6=0$$

ஒரு கூம்பைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டுக. இக்கூம்பின் உச்சியைக் காண்க.

(2) சமன்பாடு

$$ax^2+by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

ஒரு கூம்பைக் குறித்தால்,

$$\frac{a^2}{a}+\frac{v^2}{b}=\frac{w^2}{c}=d$$

எனக் காட்டுக.

விடைகள்

(1) (1, 1, 0)

8. இருபடிப் பரப்புகள்

§ 94. இருபடிப் பரப்புகள் (Quadric Surfaces)

இருபடிச் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் பரப்புகள் யாவும் இருபடிப் பரப்புகள் என்று வழங்கப்படுகின்றன. கோளம், ஒரு சோடித் தளங்கள் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள், இருபடிச் சமன்பாடுகள். ஆகையால் கோளங்களும், சோடிக் கோடுகளும் இருபடிப் பரப்புகளாகும். இருபடிப் பரப்புகளில் கூம்புகளும், உருளைகளும் உண்டு என்பதை முந்திய அத்தியாயத்தில் கண்டோம்.

இங்கு மற்ற இருபடிப் பரப்புகளைப்பற்றி பார்ப்போம். இதற்காக ஒரு நேர்கோடு, ஒரு இருபடிப் பரப்பை வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண முயலுவோம். இதற்காக நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x-x_1}{\lambda}=\frac{y-y_1}{\mu}=\frac{z-z_1}{\nu}$$

என்றும், இருபடிப் பரப்பின் சமன்பாட்டை

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$
$$+2ux+2vy+2wz+d=0$$

என்றும் கொள்வோம். அப்படியாயின், வெட்டும் புள்ளியை

$$(x_1+\lambda k,\quad y_1+\mu k,\quad z_1+\nu k)$$

என்று கொள்ளலாம். இப் புள்ளியின் கூறுகள் இருபடிப் பரப்பின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். ஆகவே,

$$a(x_1+\lambda k)^2+b(y_1+\mu k)^2+c(z_1+\nu k)^2$$
$$+2f(y_1+\mu k)(z_1+\nu k)+2g(z_1+\nu k)(x_1+\lambda k)$$
$$+2h(x_1+\lambda k)(y_1+\mu k)+2u(x_1+\lambda k)$$
$$+2v(y_1+\mu k)+2w(z_1+\nu k)+d=0.$$

இது k-யில் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. ஆகவே, k-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் உண்டு. இம் மதிப்புகள் மெய்யானதாகவோ, கற்பனை யானதாகவோ இருக்கலாம், எனவே நேர்கோடு, இருபடிப் பரப்பை வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை இரண்டு என்றா கிறது.

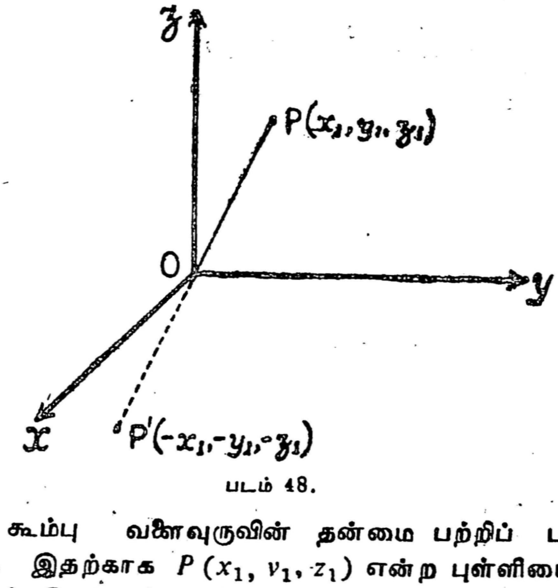
அடுத்ததாக, ஓர் இருபடிப் பரப்பை, ஒரு தளம் வெட்டும் வளைவின் தன்மை பற்றிப் பார்ப்போம். இத் தளத்திலுள்ள எந்த நேர்கோடும் இருபடிப் பரப்பை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும். அதாவது, தளம், இருபடிப் பரப்பை வெட்டும் வளைவினை, நேர் கோடு இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆனால், ஒரு கூம்பு வளைவைத்தான், கூம்பு வளைவின் தளத்திலுள்ள எந்த நேர் கோடும் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும் என்பதை முன்பே அறிவோம். ஆகவே, இருபடிப் பரப்பை, ஒரு தளம், ஒரு கூம்பு வளைவில் வெட்டுகிறது என்றாகிறது.

இருபடிப் பரப்புகளை கூம்பு வளைவுரு (Conicoids) என்றும் பொதுவாக வழங்குவதுண்டு.

§95. சமன்பாடு $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவின் தன்மை

இங்குக் குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0 \qquad \ldots \quad (95 \cdot 1)$$



படம் 48.

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவின் தன்மை பற்றிப் படிப்போம் (படம் 48). இதற்காக $P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியைக் கூம்பு வளைவுருவின் மேல் எடுத்துக் கொள்வோம்.

அப்படியாயின்,

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 - 1 = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (95{\cdot}2)$$

இப்பொழுது $P'(-x_1, -y_1, -z_1)$ என்ற புள்ளியும் கூம்பு வளை வுருவின் மேல் அமையும் என்பதைத் தொடர்பு

$$A(-x_1)^2 + B(-y_1)^2 + C(-z_1)^2 - 1 = 0$$

மூலமும், தொடர்பு (95·2) மூலமும் அறியலாம். ஆனால் PP'-ன் மையம், ஆதி. அதாவது கூம்பு வளைவுருவின் ஆதி வழியாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு நாணும், ஆதியால் இரு சம துண்டுகளாக வெட்டப்படுகின்றது. ஒரு கூம்பு வளைவுருவின் இத்தகைய புள்ளி கூம்பு வளைவுருவின் மையம் என்று வழங்கப்படுகின்றது. மையத்தைக் கொண்டுள்ள ஒவ்வொரு கூம்பு வளைவுருவும் மையக் கூம்பு வளைவுரு (central conicoid) என்றும், மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு நாணும் கூம்பு வளைவுருவின் விட்டம் என்றும், மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு தளமும் கூம்பு வளைவுருவின் விட்டத் தளம் (diametral plane) என்றும் வழங்கப்படுகின்றன.

இப்பொழுது, குறிப்பாகச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \dots \qquad (95{\cdot}3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \dots \qquad (95{\cdot}4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad \dots \qquad (95{\cdot}5)$$

குறிக்கும் மையக் கூம்பு வளைவுருக்களின் தன்மைகளைப் பார்ப்போம். இங்கு a, b, c மூன்றும் மிகை எண்கள் எனக் கொள்வோம். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று கூம்பு வளைவுருக்கள், முறையே

நீள் வளைவுரு (ellipsoid),

ஒரு தகடு அதிபரவளைவுரு (hyperboloid of one sheet),

இரு தகடு அதிபரவளைவுரு (hyperboloid of two sheets)

என்று வழங்கப்படுகின்றன. இப் பெயர்கள், கூம்பு வளைவுருக் களை பல தளங்கள் வெட்டும் கூம்பு வளைவுகளின் தன்மையைப் பொறுத்துள்ளன என்பதைப் பின்பு காணலாம்.

இக் கூம்புவளைவுருக்களில், ஒன்றின்மேல் (x_1, y_1, z_1) என்பது ஒரு புள்ளியானால், $(-x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியும் இக் கூம்பு வளைவுருவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும் என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, இக் கூம்பு வளைவுரு, தளம் yOz ஐப் பொறுத்து சமச்சீர் உடையது என்றாகிறது. இதுபோலவே இக் கூம்பு வளைவுரு மற்ற இரண்டு கூற்றச்சுகளைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் உடையது. அதாவது ஒரு மையக் கூம்பு வளைவுருவானது, மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் மூன்று தளங்களைப் பொறுத்து சமச்சீர் உடையதாக இருக்கும். இம் மூன்று தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானதாக இருக்கும். இத் தளங்கள், கூம்பு வளைவுருவின் தலையாய தளங்கள் (principal planes) என்று வழங்கப்படுகின்றன.

இப்பொழுது, குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுரு பற்றிப் பார்ப்போம். இச் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

என்று அடைகிறோம். எனவே, x-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $-a$, மீப்பெரு மதிப்பு a ஆகும். அதாவது நீள் வளைவுருவின் மேலுள்ள புள்ளிகளின் x கூறுகள்

$$-a < x < a$$

என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கு இணங்கியிருக்கும். இது போலவே, புள்ளிகளின் y கூறுகளும், z கூறுகளும்

$$-b < y < b,$$
$$-c < z < c$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கியிருக்கும் (படம் 49). அதாவது நீள் வளைவுரு ஓர் அடைத்த பரப்பாகும் (closed surface).

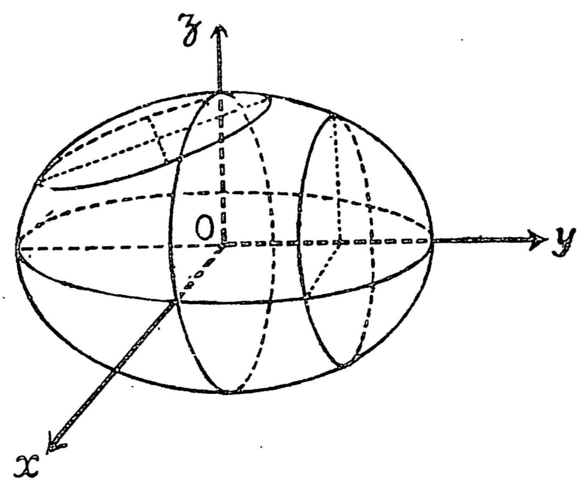
அடுத்தபடியாக இந் நீள்வளைவுருவை, சமன்பாடு

$$x = k \quad (k > 0)$$

குறிக்கும் தளம், வெட்டும் வளைவு எத்தன்மையது எனப் பார்ப்போம்.

இவ்வளைவின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2 + - k^2)}{a^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^2(a^2 - k^2)}{a^2}} - 1 = 0, \; x = k$$



படம் 49.

என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, இவ் வளைவு, ஒரு நீள் வளைவாகும். மேலும் நீள்வளைவுருவை, சமன்பாடு

$$x = -$$

குறிக்கும் தளம் வெட்டும் வளைவும், இந் நீள்வளைவை ஒத்த ஒரு நீள்வளைவாகும். இப்பொழுது k ஆனது கூடிக் கொண்டே சென்று a ஐ அடையும்பொழுது, சமன்பாடுகள்

$$x = a, \quad x = -a$$

குறிக்கும் தளங்கள், கூம்பு வளைவுருவை முறையே

$$A(a, 0, 0), \; A'(-a, 0, 0)$$

என்ற புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. இது போலவே சமன்பாடுகள்

$$y = b, \quad y = -b; \quad z = c, \quad z = -c$$

குறிக்கும் தளங்கள் நீள்வளைவுருவை முறையே

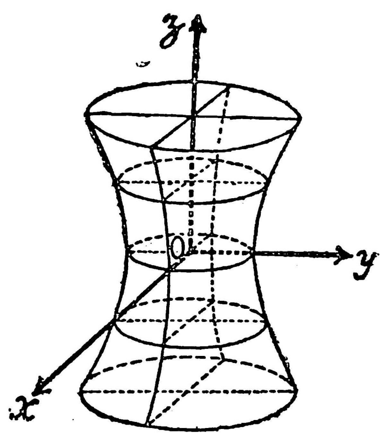
$$B(0, b, 0), \; B'(0, -b, 0); \; C(0, 0, c), \; C'(0, 0, -c)$$

என்ற புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. AA', BB', CC' என்பன நீள்வளைவுருவின் தலையாய அச்சுகள் என்று கூறப்படுகின்றன. இவற்றின் நீளங்கள் முறையே $2a$, $2b$, $2c$ ஆகும்.

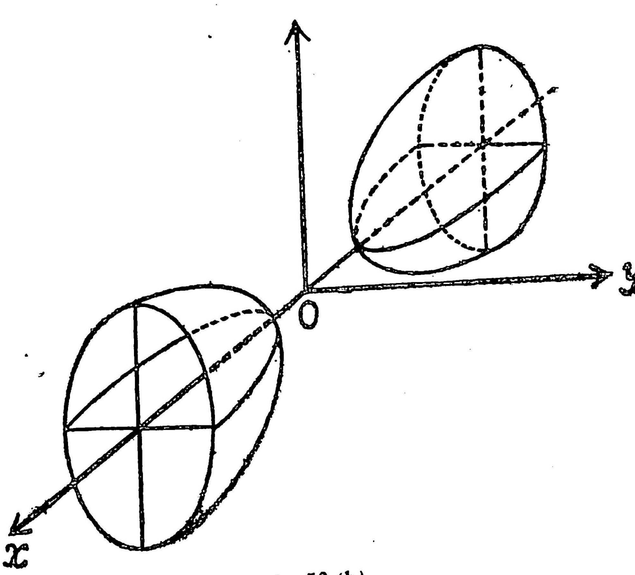
இம் முறைப்படியே, மற்ற இரண்டு சமன்பாடுகள், அதாவது சமன்பாடுகள்

$$x^2 + \frac{y^2}{l^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$



படம் 50 (a).



படம் 50 (b).

குறிக்கும் மையக் கூம்பு வளைவுருக்கள், அடைத்த பரப்புகள் அல்ல என்றும்,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0,$$

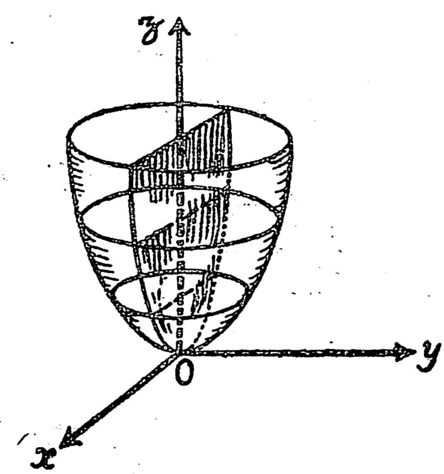
என்ற சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்புவுருக்கள் அடைத்த பரப்புகள் அல்ல என்றும் காணலாம். இங்கு இக் கடைசி இரண்டு சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருக்கள் முறையே,

நீள் வளைவுப் பரவளைவுரு

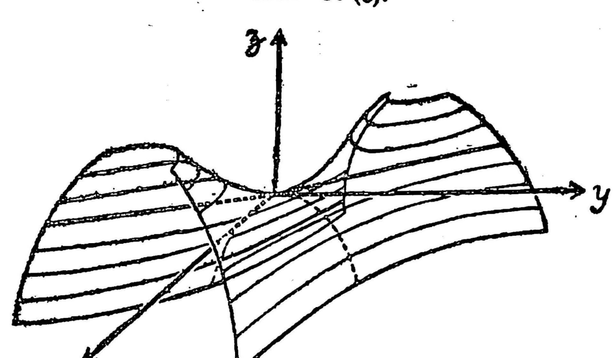
அதி பரவளைவுப் பரவளைவுரு

என்று வழங்கப்படுகின்றன. சமன்பாடுகள்

$$= x \pm k,\ y = \pm k,\ z = \pm k$$



படம் 50 (c).



படம் 50 (d)

குறிக்கும் தளங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் குறிப்பிட்டுள்ள வாறு கூம்பு வளைவுகளில் வெட்டும் என எளிதில் காணலாம்.

அட்டவணை

	$x = \pm k$	$y = \pm k$	$z = \pm k$	படம்
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (நீள் வளைவுரு)	நீள் வளைவுகள்	நீள் வளைவுகள்	நீள் வளைவுகள்	49
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (ஒரு தகடு அதிபர வளைவுரு)	அதிபர வளைவுகள்	அதிபர வளைவுகள்	நீள் வளைவுகள்	50 (a)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$ (இரு தகடு அதிபர வளைவுரு)	நீள் வளைவுகள் ($k < a$ என்றால், வெட்டு கற்பனையானது)	அதிபர வளைவுகள்	அதிபர வளைவுகள்	50 (b)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} - 1 = 0$ (நீள் வளைவுப் பர வளைவுரு)	பரவளைவுகள்	பரவளைவுகள்	தளம் $z = k$-ன் வெட்டு நீள் வளைவு தளம் $z = -k$-ன் வெட்டு கற்பனை வளைவு	50 (c)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} - 1 = 0$ (அதிபர வளைவுப் பரவளைவுரு)	பரவளைவுகள்	பரவளைவுகள்	அதிபர வளைவுகள்	50 (d)

§ 96. குறியீடுகள்

இரு பரிமாணப் பகு முறை வரை கணிதத்தில் பயன்படுத்தப் படும் சில குறியீடுகளை, முப்பரிமாணப் பகுமுறை வரை கணிதத் திற்கும் பயன்படுத்த வேண்டியுள்ளது. இதற்காக

$$F = F(x, y, z)$$

என்ற x, y, z ஆகியவற்றிலுள்ள ஒரு பொதுவான கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். முதலில் (F) ஐ

$$F(x_1, y_1, z_1)$$

என்று வரையறுப்போம். அதாவது F-லிருந்து F_1 ஐப் பெறுவ தற்கு F-ல் உள்ள x, y, z மூன்றையும் முறையே x_1, y_1, z_1 ஆகிய வற்றைப் பிரதியிட்டு நீக்கவேண்டும்.

அடுத்ததாக, ஓர் இருபடிக் கோவையை S எனக் குறிப்போம். அப்படியாயின், ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை

$$S = 0$$

என்று குறிக்கலாம்.

இப்பொழுது, குறிப்பாக

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை $S = 0$ எனக் குறித்தால்,

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d$$

என்றும், மேலும்

$$S_1 = ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2hx_1y_1 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d.$$

$$S_2 = ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 + 2fy_2z_2 + 2gz_2x_2 + 2hx_2y_2 + 2ux_2 + 2vy_2 + 2wz_2 + d$$

என்றும் இருக்கும்.

அடுத்ததாக, S-லிருந்து T_1, T_2, ... என்ற ஒருபடிக் கோவை களை வரையறுப்போம், குறிப்பாக T_1 ஐ அடைய S-ல்

x^2-க்குப் பதிலாக $x x_1$ ஐயும்,

y^2-க்குப் பதிலாக $y y_1$ ஐயும்,

z^2-க்குப் பதிலாக $z z_1$ ஐயும்,

yz-க்குப் பதிலாக $\dfrac{yz_1+y_1 z}{2}$ ஐயும்,

zx-க்குப் பதிலாக $\dfrac{zx_1+z_1 x}{2}$ ஐயும்,

xy-க்குப் பதிலாக $\dfrac{xy_1+x_1 y}{2}$ ஐயும்,

x-க்குப் பதிலாக $\dfrac{x+x_1}{2}$ ஐயும்,

y-க்குப் பதிலாக $\dfrac{y+y_1}{2}$ ஐயும்,

z-க்குப் பதிலாக $\dfrac{z+z_1}{2}$ ஐயும்,

பிரதியிட வேண்டும். அதாவது

$$T_1 = axx_1 + byy_1 + czz_1 + 2f\frac{yz_1+y_1z}{2} + 2g\frac{zx_1+z_1x}{2} + 2h\frac{xy_1+x_1y}{2} + 2u\frac{x+x_1}{2} + 2v\frac{y+y_1}{2} + 2w\frac{z+z_1}{2} = d$$

ஆகும். இதேபோல்,

$$T_2 = axx_2 + byy_2 + czz_2 + 2f\frac{yz_2+y_2z}{2} + 2g\frac{zx_2+z_2x}{2} + 2h\frac{xy_2+x_2y}{2} + 2u\frac{x+x_2}{2} + 2v\frac{y+y_2}{2} + 2w\frac{z+z_2}{2} + d$$

ஆகும். இங்கு

$$(T_1)_1 = S_1$$
$$(T_1)_2 = (T_2)_1$$

என்றிருக்கும் என்பதை எளிதில் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$$

என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$T_1 = axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1$$
$$T_2 = axx_2 + byy_2 + czz_2 - 1$$

ஆகும். மேலும்,

$$\begin{aligned}(T_1)_1 &= (axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1)_{x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1}\\ &= ax_1x_1 + by_1y_1 + cz_1z_1 - 1\\ &= ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1\\ &= S_1.\end{aligned}$$

மேலும்,

$$(T_1) = (axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1)_{x=x_2,\ y=y_2,\ z=z_2}$$

$$= ax_2x_1 + by_2y_1 + cz_2z_1 - 1$$

$$= (T_2)_1 .$$

இனிமேல் $(T_1)_1$, $(T_1)_2$, $(T_2)_1$ என்பவற்றைச் சுருக்கமாக T_{11}, T_{12}, T_{21} என்றே குறிப்போம். இம் முறையில் பொதுவான எந்த S-க்கும்

$$T_{11} = S_1,\ T_{12} = T_{21}$$

ஆகும்.

§97. ஒரு கோடு ஒரு கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை

இங்கு, குறிப்பாக, சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_1}{\lambda} = \frac{y - y_1}{\mu} = \frac{z - z_1}{v}$$

குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 1 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். இக் கோட்டின் மேலுள்ள புள்ளிகளை

$$(x_1 + \lambda k,\ y_1 + \mu k,\ z_1 + vk)$$

என்ற துணையலகு வடிவில் குறிக்கலாம். இக் கோடு கூம்பு வளை வுருவைத் தரும் k-ன் மதிப்புகளை,

$$a(x_1 + \lambda k)^2 + b(y_1 + \mu k)^2 + c(z_1 + vk)^2 - 1 = 0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டிலிருந்து அடைகிறோம். இச் சமன் பாட்டை

$$(a\lambda^2 + b\mu^2 + cv^2)k^2 + 2(a\lambda x_1 + b\mu y_1 + cvz_1)k + S_1 = 0$$

என்று மாற்றி எழுதலாம். கொடுக்கப்பட்ட கோடு, கூம்பு வளை வுருவைத் தொட்டால், வெட்டுப் புள்ளிகள் இணைந்த புள்ளி களாகும். அதாவது மேற்கண்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாகும். ஆகவே, இச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியமாகும். எனவே, வேண்டிய நிபந்தனை

$$(a\lambda x_1 + b\mu y_1 + cvz_1)^2 - S_1(a\lambda^2 + b\mu^2 + cv^2) = 0$$

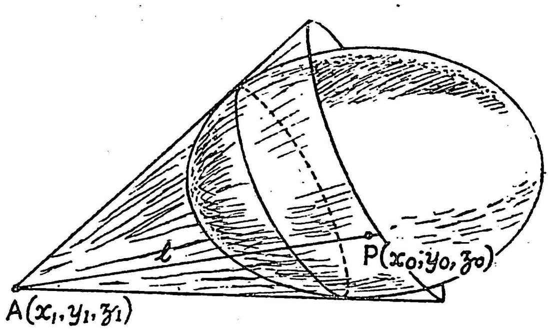
என்பதாகும்.

§98. ஒரு கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பு (Enveloping cone)

இங்கு, புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஐ உச்சியாகக் கொண்டு, குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + bz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் மையக் கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 51). புள்ளி (x_1, y_1, z_1)-க்கு



படம் 51.

A என்ற பெயர் இடுவோம். Aயின் வழியாகச் செல்லுமாறும், கொடுக்கப்பட்ட கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுமாறும் உள்ள l என்ற ஒரு கோட்டை எடுத்துக்கொண்டு, அதன்மேல்

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது l-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_0 - z_1} = k$$

ஆகும். l ஆனது கூம்பு வளைவுருவை வெட்டும் புள்ளிகளை

$$\{x_1 + k(x_0 - x_1), y_1 + k(y_0 - y_1), z_1 + k(z_0 - z_1)\} \quad \cdots \quad (98 \cdot 1)$$

அல்லது,

$$\{kx_0 + (1-k)x_1, ky_0 + (1-k)y_1, kz_0 + (1-k)z_1\} \quad \cdots \quad (98 \cdot 2)$$

என்று குறித்தால், k-ன் மதிப்புகளைத் தரும் சமன்பாடாவது :

$$a\{kx_0 + (1-k)x_1\}^2 + b\{ky_0 + (1-k)y_1\}^2 + c\{kz_0 + (1-k)z_1\}^2 - 1 = 0$$

அதாவது $k^2(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2)$
$+ 2k(1-k)\{ax_0x_1 + by_0y_1 + cz_0z_1\}$
$+ (1-k)^2\{ax_1^2 + by_1^2 + cz_1\}^2 - 1 = 0$

அதாவது $k^2 \{(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1) + 1\}$
$+ 2k(1-k)\{ax_0x_1 + by_0y_1 + cz_0z_1 - 1) + 1\}$
$+ (1-k)^2 \{(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1) + 1\} - 1 = 0$

அதாவது

$$k^2(S_0 + 1) + 2k(1-k)(T_{01} + 1) + (1-k)^2(S_1 + 1) - 1 = 0$$

அதாவது

$$k^2 S_0 + 2(k-k^2)T_{01} + (1+k)^2 S_1 + \{k^2 + 2k(1-k) + (1-k)^2 - 1\} = 0$$

அதாவது

$$(S_0 - 2T_{01} + S_1)k^2 + 2(T_{01} - S_1)k + S_1 = 0 \quad \dots (98\cdot3)$$

l, கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுகிறது. ஆகவே, l கூம்பு வளைருவை வெட்டும் புள்ளிகள் இணைந்த புள்ளிகளாகும். அதாவது சமன்பாடு (98·3)-ன் மூலங்கள் சமமாகும். எனவே, இச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியமாகும்.

ஆகவே,

$$4(T_{01} - S_1)^2 - 4(S_0 - 2T_{01} + S_1)S_1 = 0$$

அதாவது $\{T_{01}^2 - 2T_{01}S_1 + S_1^2\}$
$- \{S_0S_1 - 2T_{01}S_1 + S_1^2\} = 0$

அதாவது $T_{01}^2 - S_0S_1 = 0 \quad \dots (98\cdot4)$

இப்பொழுது (x_0, y_0, z_0) என்பது l-ன் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி. ஆகவே, l-ன் வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$T_1^2 - SS_1 - 0 \quad \dots (98\cdot5)$$

ஆகும். அதாவது (x_1, y_1, z_1) ஐ உச்சியாகக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$(axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1)^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2 - 1)(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1) = 0$$

ஆகும்.

இங்கு S என்பது $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$ என்ற இருபடிக் கோவையைக் குறிக்கின்றது. அவ்விதம் இன்றி S என்பது, x, y, z ஆகியவற்றில் எந்தப் பொதுப்படையான ஓர் இருபடிக் கோவையைக் குறித்தாலும், இதே முறையில் (x_1, y_1, z_1) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடு $S = 0$ குறிக்கும் கூம்புருவைத் தழுவும் கூம்பின் சமன்பாட்டை

$$T_1^2 - SS_1 = 0$$

என்று அடையலாம். எனவே, குறிப்பாக, (x_1, y_1, z_1) ஐ உச்சியாகவும், சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தைத் தழுவும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$(xx_1 + yy_1 + zz_1 - r^2)^2 - (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$
$$(x_1^2 + y_1^2 + y_1^2 - r^2) = 0$$

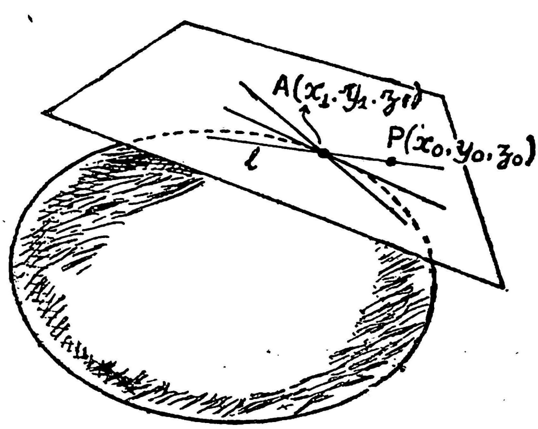
என்றிருக்கும்.

§ 99. ஒரு கூம்பு வளைவுருவின் தொடுதளம்

குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவின் $A(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியிடத்துத்



படம் 52.

தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டை இப்பொழுது காண்போம் (படம் 52). இதற்காக, § 98-ல் கண்டதுபோன்று, $A\ (x_1, y_1, z_1)$

வழியாகச் செல்லும் l என்ற கோட்டை எடுத்துக்கொண்டு, அதன்மேல்

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியையும் எடுத்து, l ஆனது கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையை

$$T_{01}^2 - S_0 S_1 = 0$$

என்று அடைவோம். ஆனால், இங்குப் புள்ளி (x_1, y_1, z_1) கூம்பு வளைவுருவின் மேல் அமைந்துள்ளது.

ஆகவே, $S_1 = 0.$

ஆகவே l தொடுவதற்கான நிபந்தனை

$$T_{01}^2 - S_0 \cdot 0 = 0$$

அதாவது $T_{01} = 0$

என்றாகிறது. இப்பொழுது l, கூம்பு வளைவுருவை $A(x_1, y_1, z_1)$ இடத்துத் தொடுகின்றது. ஆனால் (x_0, y_0, z_0) என்பது l-ன் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி. ஆகவே l ஆனது, A ஐப் பொறுத்துச் சுழன்று கொண்டே, கூம்பு வளைவுருவைத் தொட்டால், l-ன் வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0. \qquad \ldots (99 \cdot 1)$$

அதாவது, $axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1 = 0$

ஆகும். இச்சமன்பாடு ஒரு தளத்தைக் குறிக்கிறது. இத் தளம் கூம்பு வளைவுருவை (x_1, y_1, z_1) இடத்துத் தொடுகிறது.

இங்கு S என்பது $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$ என்ற கோவையைக் குறிக்கின்றது. அவ்விதம் இன்றி, S என்பது, x, y, z ஆகியவற்றில் எந்தப் பொதுப்படையான ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டைக் குறித்தாலும், இதே முறையில் சமன்பாடு $S = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவின் (x_1, y_1, z_1) இடத்துத் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

என்று நிறுவலாம். எடுத்துக்காட்டாக, குறிப்பாக, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தின் (x_1, y_1, z_1) இடத்துத் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - r^2 = 0$$

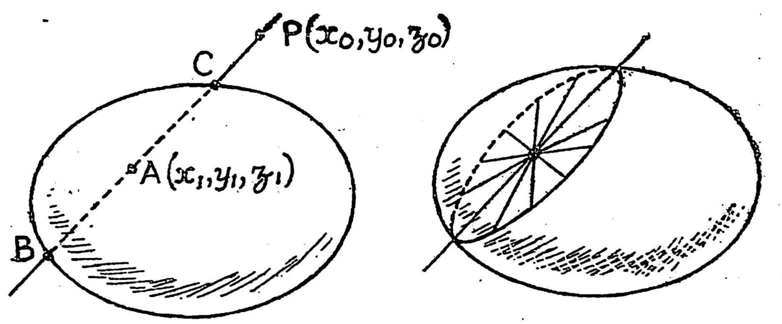
ஆகும்.

§ 100. ஒரு நிலைத்த புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட நாணின் வரைபரப்பு

இங்குக் குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவை எடுத்துக் கொள்வோம். இக் கூம்பு வளைவுருவின் நகரும் நாண் ஒன்று $A(x_1, y_1, z_1)$ என்ற நிலைத்த புள்ளியைத் தன் மையப் புள்ளியாகக் கொண்டுள்ளது எனக் கொண்டு, நாணின் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 53).



படம் 53.

இதற்காக, § 98-ல் செய்தது போன்று, A-ன் வழியாகச் செல்லும் l என்ற கோட்டை எடுத்துக் கொண்டு, அதன் மேல்

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியையும் எடுத்துக் கொள்வோம். l, கூம்பு வளைவுருவை B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், (98·1)-ன் மூலம், B-ம், C-ம்

$$\{x_1 + k_1(x_0 - x_1), y_1 + k_1(y_0 - y_1), z_1 + k_1(z_0 - z_1)\},$$

$$\{x_1 + k_2(x_0 - x_1), y_1 + k_2(y_0 - y_1), z_1 + k_2(z_0 - z_1)\}$$

என்றிருக்கும் என்றும், (98·3)-ன் மூலம், k_1, k_2 இரண்டும்,

$$(S_0 - 2T_0 + S_1)k^2 + 2(T_{01} - S_1)k + S_1 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும் என்றும் அறிவோம். $A(x_1, y_1, z_1)$, BC-ன் மையப் புள்ளியானால், கிடைப்பதாவது :

$$x_1 = \frac{\{x_1 + k_1(x_0 - x_1)\} + \{x_1 + k_2(x_1 - x_1)\}}{2}$$

அதாவது, $2x_1 = 2x_1 + (k_1 + k_2)(x_0 - x_1)$

அதாவது, $(k_1 + k_2)(x_0 - x_1) = 0$

அதாவது, $k_1 + k_2 = 0$

ஆகவே, $T_{01} - S_1 = 0.$

இப்பொழுது l ஐக் கூம்பு வளைவுருவின் ஒரு நகரும் நாணாகவும், இந் நாணை நிலைத்த புள்ளி (x_1, y_1, z_1), இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றது என்றும் கொண்டால், l-ன் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டை $T_{01} - S_1 = 0$-லிருந்து

$$T_1 - S_1 = 0 \qquad \ldots \quad (100\cdot1)$$

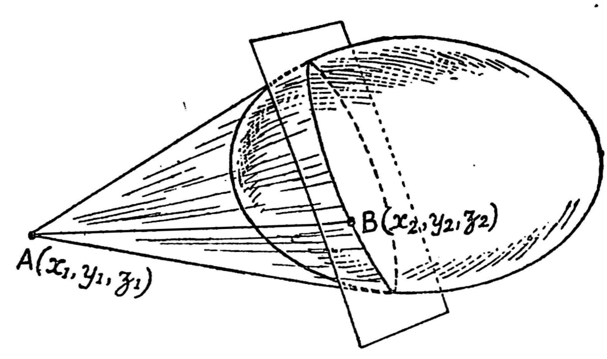
என்று பெறுகிறோம். அதாவது,

$$(axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1) - (ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1) = 0$$

என்று பெறுகிறோம். இச் சமன்பாடு ஓர் ஒருபடிச் சமன்பாடாகையால், இஃது ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது. அதாவது, இத்தளத்தில் அமைந்துள்ள கூம்பு வளைவுருவின் நாண்கள் ஒவ்வொன்றும் புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஐ மையப் புள்ளியாகக் கொண்டிருக்கும். இங்கே தளம் (100·1), கூம்பு வளைவுருவை வெட்டும் கூம்பு வளைவின் மையப் புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஆகும்.

§ 101. தொடுகைத் தளம் (Plane of contact)

ஒரு புள்ளியிலிருந்து, ஒரு கூம்பு வளைவுருவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுபுள்ளிகள் அனைத்தும், ஒரு தளத்தில் அமையும் எனக் காட்டுவோம். அதாவது, இப்



படம் 54.

புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டு, கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பின் பிறப்பிகள், கூம்பு வளைவுருவைத் தொடும் புள்ளிகள், ஒரு தளத்தில் அமையும் எனக் காட்டுவோம் (படம் 54).

இத் தொடு புள்ளிகள்,

(i) கூம்பு வளைவுருவின் மேலும்,

(ii) தழுவும் கூம்பின் மேலும்,

உள்ளன. ஆகவே, கூம்பு வளைவுருவின் சமன்பாட்டை

$$S = 0 \quad \ldots \quad (101{\cdot}1)$$

என்றும், எப் புள்ளியிலிருந்து தொடு கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளனவோ அப் புள்ளியை $A(x_1, y_1, z_1)$ என்றும், தொடு கோடுகளில் ஒன்றின் தொடு புள்ளியை $B(x_2, y_2, z_2)$ என்றும் கொண்டால், B-ன் கூறுகள் கூம்பு வளைவுருவின் சமன்பாடு

$$S = 0 \text{ ஐயும்,}$$

தழுவும் கூம்பின் சமன்பாடு,

$$T_1^2 - SS_1 = 0 \text{ ஐயும்}$$

திருப்தி செய்யும். எனவே

$$S_2 = 0, \; T_{12}^2 - S_1 S_2 = 0.$$

இவை இரண்டிலிருந்தும்

$$T_{12} = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இதிலிருந்து புள்ளி (x_2, y_2, z_2) ஆனது சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

குறிக்கும் தளத்தில் உள்ளது என்பதை எளிதில் காணலாம். எனவே, தொடுபுள்ளிகள் அனைத்தும் இத் தளத்தில் உள்ளன என்றாகிறது. இத் தளத்திற்கு (x_1, y_1, z_1)-ன் தொடுகைத் தளம் என்று பெயர்.

§ 102. மாற்று முறையில் சமன்பாடுகள்

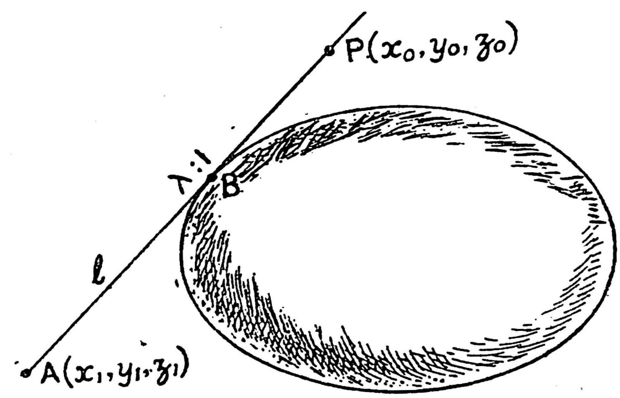
ஒரு கூம்பு வளைவுருவின், தழுவும் கூம்பின் சமன்பாட்டையும், தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டையும், வேறொரு முறையில் காண்போம்.

முதலில், புள்ளி $A(x_1, y_1, z_1)$ ஐ உச்சியாகக் கொண்டு, குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இதற்காக, A-ன் வழியாகச் செல்லுமாறும், கூம்பு

வளைவுருவைத் தொடுமாறும் உள்ள l என்ற ஒரு கோட்டை எடுத்துக் கொண்டு, அதன்மேல் $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 55). l கூம்பு



படம் 55.

வளைவுருவை வெட்டும் புள்ளி ஒன்றை B எனவும், B, AP ஐ $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின், B ஆனது

$$\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda + 1}\right)$$

என்றிருக்கும். மேலும் B, கூம்பு வளைவுருவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி ஆகையால்,

$$a\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1}\right)^2 + b\left(\frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}\right)^2 + c\left(\frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda + 1}\right)^2 - 1 = 0$$

அதாவது,

$$a(\lambda x_0 + x_1)^2 + b(\lambda y_0 + y_1)^2 + c(\lambda z_0 + z_1)^2 - (\lambda + 1)^2 = 0$$

அதாவது,

$$\lambda^2(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1) + 2(ax_0x_1 + by_0y_1 + cz_0z_1 - 1)\lambda + (ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1) = 0$$

அதாவது,

$$S_0\lambda^2 + 2T_{01}\lambda + S_1 = 0$$

இது λ-ல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு. இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள், l ஆனது கூம்பு வளைவுருவை வெட்டும் புள்ளிகள், AP ஐப் பிரிக்கும் விகிதங்களைக் குறிக்கின்றன. ஆனால் l கூம்பு வளை வுருவைத் தொட்டால், இவ் வெட்டுப் புள்ளிகள் இணைந்த புள்ளிகளாகும். அதாவது λ-ன் மதிப்புகள் சமமாகும். ஆகவே, இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியமாகும். எனவே

$$4T_{01}^2 - 4S_0S_1 = 0$$

அதாவது, $$T_{01}^2 - S_0S_1 = 0$$

இப்பொழுது (x_0, y_0, z_0) என்பது l-ன் மேலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி. ஆகவே l ஆனது, புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் சென்று கொண்டும், கூம்பு வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டும் நகர்ந்து, பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$T_1^2 - SS_1 = 0$$

ஆகும். அதாவது, புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஐ உச்சியாகக் கொண்டு, கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$T_1^2 - SS_1 = 0$$

ஆகும்.

அடுத்தபடியாக, (x_1, y_1, z_1) ஆனது கூம்பு வளைவுருவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம். மேலும் l, கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுகிறது. அப்படியாயின்,

$$T_{01}^2 - S_0S_1 = 0, \; S_1 = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. அதாவது

$$T_{01} = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆனால், (x_0, y_0, z_0) என்பது l-ன் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி. ஆகவே l, கூம்பு வளைவுருவை (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியில் தொட்டுக்கொண்டே A ஐப் பொறுத்துச் சுழன்றால், l பிறப்பிக்கும் வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

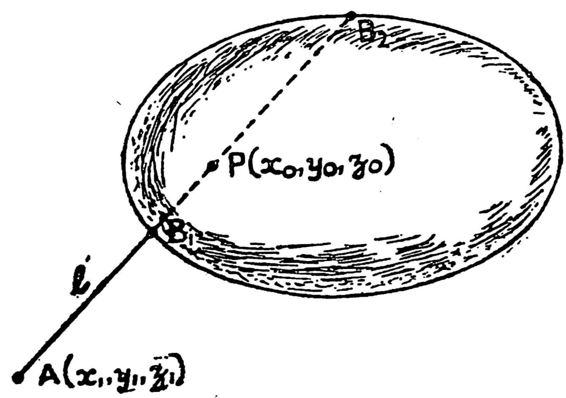
என்று கிடைக்கின்றது. அதாவது, கூம்பு வளைவுருவின் (x_1, y_1, z_1) இடத்துத் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

§ 103. இசைத் தளம் (Polar plane)

A என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் l என்ற ஒரு கோடு, கொடுக்கப்பட்ட கூம்பு வளைவுருவை B_1, B_2 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும் (படம் 56). P என்ற புள்ளியை, l-ன்மேல்



படம் 56.

ஒரு குறிப்பிட்ட முறையில் எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது, B_1, B_2 என்ற புள்ளிகளில் ஒன்று AP ஐ உட்புறமாகப் பிரிக்கும் விகிதமும், மற்றொன்று வெளிப் புறமாகப் பிரிக்கும் விகிதமும், சமமாக இருக்குமாறு P ஐ எடுக்கவேண்டும். அப்படியாயின், l நகரும் போது, P-ன் இயங்குவரை, கூம்பு வளைவுருவைப் பொறுத்த A-ன் இசைத் தளம் என்று வழங்கப்படுகின்றது. A, இத் தளத்தின் இசைப் புள்ளி (pole) என்று வழங்கப்படுகின்றது.

இப்பொழுது சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைப் பொறுத்த, புள்ளி A_1 (x_1, y_1, z_1)-ன் இசைத் தளத்தைக் காண்போம். இதற்காக P (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியை இசைத் தளத்தின்மீது எடுத்துக் கொண்டு, AP ஆனது, கூம்பு வளைவுருவை B_1, B_2 என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறதெனக் கொண்டால், இவ் வெட்டுப் புள்ளிகள், $A_1 P$ ஐப் பிரிக்கும் விகிதங்களைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு

$$S_0 \lambda^2 + 2 T_{01} \lambda + S_1 = 0$$

ஆகும் என்று § 102-ல் கண்டோம். ஆனால், இவ் விகிதங்களின் மதிப்புகள் சமம். ஆனால், இவை குறிகளில்

எதிரானவை. ஆகவே, இவற்றின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும். எனவே

$$T_{01} = 0$$

இதிலிருந்து $T(x_0, y_0, z_0)$-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு, அதாவது $A(x_1, y_1, z_1)$-ன் இசைத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

ஆகும் என்று அறிகிறோம்.

§ 104. இசைத் தளம், இசைப்புள்ளி ஆகியவற்றைச் சார்ந்த விளைவுகள்

முதலில், இரண்டு புள்ளிகளில் ஒன்றின் இசைத்தளம் மற்றொன்றின் வழியாகச் சென்றால், இரண்டாவதன் இசைத் தளம், முதல் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுவோம். இதற்காக இப் புள்ளிகளை

$$A_1(x_1, y_1, z_1),\ A_2(x_2, y_2, z_2)$$

எனக் கொள்வோம். மேலும் A_1-ன் இசைத்தளம், A_2 வழியாகச் செல்லுகிறது எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது A_1-ன் இசைத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

ஆகும். ஆனால், இத் தளம் $A_2(x_2, y_2, z_2)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே,

$$T_{12} = 0 \text{ அல்லது } T_{21} = 0.$$

ஆனால், $A_2(x_2, y_2, z_2)$-ன் இசைத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$T_2 = 0$$

ஆகும். இத் தளம் $A_1(x_1, y_1, z_1)$ வழியாகச் செல்லுகிறது என்பதை $T_{21} = 0$ என்பதிலிருந்து அறிகிறோம். இத்தகைய A_1, A_2 போன்ற புள்ளிகள், துணையியப் புள்ளிகள் (Conjugate points) என்று வழங்கப்படுகின்றன.

இவ் விளைவைப் பயன்படுத்தி, π_1, π_2 என்ற இரண்டு தளங்களையும், அவற்றின் இசைப் புள்ளிகள் A_1, A_2 என்பவற்றையும் எடுத்துக்கொண்டு, A_1 ஆனது π_2-ல் அமைந்தால், A_2 ஆனது π-ல் அமையும் என்பதை எளிதில் காணலாம். π_1, π_2 போன்ற தளங்கள், துணையியத் தளங்கள் என்று வழங்கப்படுகின்றன.

§ 105. ஒரு தளம் ஒரு கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை

குறிப்பாக, சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (105 \cdot 1)$$

குறிக்கும் ஒரு மையக் கூம்பு வளைவுருவைச் சமன்பாடு,

$$lx + my + nz - p = 0$$

குறிக்கும் தளம், தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். இதற்காகத் தொடுபுள்ளியை (x_1, y_1, z_1) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

$$T_1 = 0$$

ஆகும். அதாவது

$$axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1 = 0$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{ax_1}{l} = \frac{by_1}{m} = \frac{cz_1}{n} = \frac{-1}{-p}.$$

ஆகவே,

$$x_1 = \frac{l}{ap}, \quad y_1 = \frac{m}{bp}, \quad z_1 = \frac{n}{cp}.$$

ஆனால், இம் மதிப்புகள் சமன்பாடு $(105 \cdot 1)$ ஐத் திருப்தி செய்யும். எனவே

$$a\left(\frac{l}{ap}\right)^2 + b\left(\frac{m}{bp}\right)^2 + c\left(\frac{n}{cp}\right)^2 = 1$$

அதாவது,

$$\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = p^2 \quad \dots \quad \dots \quad (105 \cdot 2)$$

என்று கிடைக்கிறது. இதுவே வேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

இது போலவே, அல்லது $(105 \cdot 2)$–லிருந்து சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவை, சமன்பாடு

$$lx + my + nz - p = 0$$

குறிக்கும் தளம், தொடுவதற்கான நிபந்தனை

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 = p^2 \qquad \dots \quad (105{\cdot}3)$$

என்று எளிதில் நிறுவலாம். மேலும், l, m, n ஆகியவற்றின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், சமன்பாடுகள்

$$lx + my + nz = \pm\sqrt{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2} \qquad \dots \quad (105{\cdot}4)$$

குறிக்கும் தளங்கள், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுருவைத் தொடுகின்றன என்பதையும் எளிதில் காணலாம்.

அடுத்தபடியாக, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$$

குறிக்கும் பரவளைவுருவை, சமன்பாடு

$$lx + my + nz - p = 0$$

குறிக்கும் தளம், தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம்.

முன்போலவே தொடு புள்ளியை (x_1, y_1, z_1) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{z+z_1}{c} = 0$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)}{l} = \frac{\left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)}{m} = \frac{\left(-\dfrac{1}{c}\right)}{n} = \frac{\left(-\dfrac{z_1}{c}\right)}{(-p)}$$

அதாவது

$$x_1 = -\frac{la^2}{cn}, \quad y_1 = -\frac{mb^2}{cn}, \quad z_1 = -\frac{p}{n}.$$

இம் மதிப்புகளைப் பரவளைவுருவின் சமன்பாட்டில் பிரதியிட, வேண்டிய நிபந்தனை

$$\frac{\left(-\dfrac{la^2}{cn}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\dfrac{mb^2}{cn}\right)^2}{b^2} - \frac{2\left(-\dfrac{p}{n}\right)}{c} = 0$$

அதாவது $$p = -\frac{a^2 l^2 + b^2 m^2}{2cn}$$

என்ருகிறது.

இதிலிருந்து l, m, n ஆகியவற்றின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் சமன்பாடு

$$lx + my + nz = -\frac{a^2 l^2 + b^2 m^2}{2cn} \quad \dots \quad (105\cdot5)$$

குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$$

குறிக்கும் பரவளைவுருவைத் தொடும் என்று தெரிகிறது.

§ 106. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. ஒரு மையக் கூம்பு வளைவுருவின் A_1, A_2 என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடுதளங்கள் வெட்டும் கோட்டின் வழியாகவும், ஆதி வழியாகவும் செல்லும் தளம், நாண் A_1A_2 ஐ, இரண்டு சம பாகங்களாக வெட்டுகிறது எனக் காட்டுக.

மையக் கூம்பு வளைவுருவின் தலையாய அச்சுகளைக் கூற்றச்சுகளாக எடுத்துக்கொண்டு, கூம்பு வளைவுருவின் சமன்பாட்டை

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

எனக் கொள்வோம். மேலும் A_1 ஐ (x_1, y_1, z_1) என்றும், A_2 ஐ (x_2, y_2, z_2) என்றும் கொள்வோம். அப்படியாயின்

$$S_1 = 0, \; S_2 = 0$$

மேலும், A_1, A_2 இரண்டின் இடத்துத் தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$T_1 = axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1 = 0,$$
$$T_2 = axx_2 + byy_2 + czz_2 - 1 = 0$$

ஆகும். இத் தளங்கள் வெட்டும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$(axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1) + \lambda\,(axx_2 + byy_2 + czz_2 - 1) = 0$$

என்றவாறு இருக்கும். இத் தளம் ஆதி வழியாகச் சென்ருல்,

$$(0 - 1) + \lambda\,(0 - 1) = 0.$$

அதாவது, $\lambda = -1$.

ஆகவே, இத் தளத்தின் சமன்பாடு

$(axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1) + (-1)(axx_2 + byy_2 + czz_2 - 1) = 0$

அதாவது $ax(x_1 - x_2) + by(y_1 - y_2) + cz(z_1 - z_2) = 0 \ldots(1)$

ஆகும். ஆனால் $A_1 A_2$-ன் மையப் புள்ளி,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_2 + z_2}{2}\right)$$

ஆகும். இப் புள்ளியின் கூறுகள், சமன்பாடு (1) ஐத் திருப்தி செய்கின்றது என்பதைக் கீழ்க் கண்டதிலிருந்து அறியலாம்:

$$a\frac{x_1 + x_2}{2}(x_1 - x_2) + b\frac{y_1 + y_2}{2}(y_1 + y_2) + c\frac{z_1 + z_2}{2}(z_1 - z_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{a(x_1^2 - x_2^2) + b(y_1^2 - y_2^2) + c(z_1^2 - z_2^2)\}$$

$$= \frac{2}{1}\{(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2) - (ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1)$$

$$- (ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 - 1)\}$$

$$= \frac{1}{2}(S_1 - S_2)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 0)$$

$$= 0.$$

எனவே, $A_1 A_2$-ன் மையப்புள்ளி, தளம் (1)-ன் மேல் அமைகிறது.

கணக்கு 2. சமன்பாடு $x - 4y + 3z + 4 = 0$ குறிக்கும், தளம், சமன்பாடு $x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

தொடுபுள்ளியை (x_1, y_1, z_1) எனக் கொண்டால், தொடு தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$xx_1 - 2yy_1 + 3zz_1 + 4 = 0$$

என்று எழுதலாம். இச் சமன்பாட்டையும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டையும் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது,

$$\frac{x_1}{1} = \frac{-2y_1}{-4} = \frac{3z_1}{3} = \frac{4}{4}$$

அதாவது $x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ z_1 = 1$

ஆகவே, புள்ளி (1, 2, 1), தொடுபுள்ளியாகும்.

கணக்கு 3. சமன்பாடு $x + 2y + z = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு இணையாக உள்ளவாறும், சமன்பாடு $x^2 + 2y - z^2 - 2 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுமாறும் உள்ள தளங்களின் சமன்பாடுகளையும், அவற்றின் தொடுபுள்ளிகளையும் காண்க.

ஒரு தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டை

$$x + 2y + z - p = 0$$

எனவும் இத் தளம் கூம்பு வளைவுருவைத் தொடும் புள்ளியை (x_1, y_1, z_1) எனவும் கொண்டால், இத் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$xx_1 + 2yy_1 - zz_1 - 2 = 0$$

என்றும் எழுதலாம். இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது

$$\frac{x_1}{1} = \frac{2y_1}{2} = \frac{-z_1}{1} = \frac{-2}{-p}.$$

அதாவது $x_1 = \dfrac{2}{p},\ y_1 = \dfrac{2}{p},\ z_1 = -\dfrac{2}{p}.$

ஆகவே $\left(\dfrac{2}{p},\ \dfrac{2}{p},\ -\dfrac{2}{p}\right)$ என்ற புள்ளி தொடுபுள்ளியாகும். ஆனால், இப் புள்ளியின் கூறுகள் கூம்பு வளைவுருவின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். எனவே,

$$\left(\frac{2}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{p}\right)^2 - \left(\frac{-2}{p}\right)^2 - 2 = 0$$

அதாவது $4 + 8 - 4 - 2p^2 = 0$

அதாவது $2p^2 = 8$

அதாவது $p = \pm 2.$

ஆகவே, தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x + 2y + z + 2 = 0,\ x + 2y + z - 2 = 0$$

ஆகும். மேலும், தொடுபுள்ளிகள்

$$\left(\frac{2}{2},\ \frac{2}{+2},\ -\frac{2}{+2}\right),\ \left(\frac{2}{-2},\ \frac{2}{-2},\ -\frac{2}{-2}\right)$$

அதாவது $(1, 1, -1), (-1, -1, 1)$ ஆகும்.

கணக்கு 4. சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}-1=0,\ z=0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவின் ஒரு தொடுகோட்டின் வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad \dots \qquad \dots \quad (1)$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுருவைத் தொடுமாறும் உள்ள தளங்கள், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

$$(\sqrt{a^2+c^2}\cos\theta,\ \sqrt{b^2+c^2}\sin\theta,)$$

என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை நீள் வளைவின்மீது எடுத்துக் கொள்வோம். இப் புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{y\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}-1=0,\ z=0 \quad \dots \quad (2)$$

ஆகும். ஆகவே, இத் தொடுகோட்டின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{x\cos\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{y\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}-1\right)+\lambda z=0$$

என்று எழுதலாம்.

இத் தளம், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நீள்வளைவுருவைத் தொடுமானல், தொடர்பு (105·3)-ன்மூலம்,

$$a^2\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2+b^2\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2+c^2(\lambda)^2=1^2$$

என்று கிடைக்கின்றது. அதாவது

$$\lambda^2=\frac{1}{c^2}\left[\frac{-a^2\cos^2\theta}{b^2+c^2}+\frac{-b^2\sin^2\theta}{b^2+c^2}+1\right]$$

என்று கிடைக்கின்றது. இங்கு

$$\lambda_1=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{-a^2\cos^2\theta}{a^2+c^2}+\frac{-b^2\sin^2\theta}{b^2+c^2}+1}$$

$$\lambda_2=-\sqrt{\frac{-a^2\cos^2\theta}{a^2+c^2}+\frac{-b^2\sin^2\theta}{b^2+c^2}+1}$$

என்று கொண்டால், நொடு கோடு (2)–ன் வழியாகச் சென்று கொண்டே நீள்வளைவுரு (1) ஐத் தொடும் தளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} \frac{x\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{y\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}-+\lambda_1 z=0 \\ \frac{x\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{y\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}-1-\lambda_2 z=0 \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (3)$$

ஆகும். இங்கு

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)+\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)-\lambda_1\lambda_2$$

$$=\frac{\cos\theta}{a^2+c^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2}\left[\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2+c^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{b^2+c^2}-1\right]$$

$$=\frac{1}{c^2}\left[\frac{c^2\cos^2\theta}{a^2+c^2}+\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2+c^2}+\frac{c^2\sin^2\theta}{b^2+c^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{b^2+c^2}-1\right]$$

$$=\frac{1}{c^2}\left[(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-1\right]$$

$$=0.$$

ஆகவே, தளங்கள் (3) செங்குத்தானவையாகும்.

கணக்கு 5. நிலைத்த புள்ளி $(0, 0, k)$ வழியாகச் சென்று கொண்டே ஒரு நேர்கோடு நகர்கிறது. இந் நேர்கோட்டின் வழியாகச் சென்று கொண்டே, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad \dots \quad (1)$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தொடும் தளங்கள் செங்குத்தானவை ஆனால், நேர்கோட்டின் வரைபரப்பின் சமன்பாடு

$$(b^2+c^2-k^2)x^2+(c^2+a^2+k^2)y^2+(a^2+b^2)(z-k)^2=0$$

எனக் காட்டுக.

நகரும் நேர் கோட்டின் திசை விகிதங்களை

$$\lambda, \ \mu, \ \nu$$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் λ, μ, ν என்பன மாறிகள். மேலும், நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-0}{\lambda}=\frac{y-0}{\mu}=\frac{z-k}{\nu}$$

அதாவது $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu}$; $\frac{y}{\mu} = \frac{z-k}{\nu}$

அதாவது $\mu x - \lambda y = 0, \quad \nu y - \mu(z-k) = 0$

ஆகும். ஆகவே இந் நேர்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$\{ \nu y - \mu(z-k\} + q\{ \mu x - \lambda y\} = 0$$

அதாவது $(q\mu)x + (\nu - q\lambda)y + (-\mu)z + \mu k = 0$ ...(2)

என்று எழுதலாம். இத் தளம், நீள் வளைவுருவைத் தொடுவதால், (105·3)-ன் மூலம்,

$$a^2(q\mu)^2 + b^2(\nu - q\lambda)^2 + c^2(-\mu)^2 - (\mu k)^2 = 0$$

அதாவது $(a^2\mu^2 + b^2\lambda^2)q^2 - (2b^2\lambda\nu)q + (b^2\nu^2 + c^2\mu^2 - k^2\mu^2) = 0$

என்று கிடைக்கின்றது, இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களை q_1, q_2 எனக் கொண்டால்,

$$q_1 q_2 = \frac{b^2\nu^2 + c^2\mu^2 - k^2\mu^2}{a^2\mu^2 + b^2\lambda^2},$$

$$q_1 + q_2 = \frac{2b^2\lambda\nu}{a^2\mu^2 + b^2\lambda^2}$$

என்றும், தொடுதளங்களின் திசை விகிதங்கள்

$$q_1\mu, \quad \nu - q_1\lambda, \quad -\mu$$

$$q_1\mu, \quad \nu - q_2\lambda, \quad -\mu$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. ஆனால், இத் தொடுதளங்கள் செங்குத்தானவை எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே,

$$q_1 q_2\mu^2 + (\nu - q_1\lambda)(\nu - q_1\lambda) + (-\mu)(-\mu) = 0$$

அதாவது

$$(\mu^2 + \lambda^2)q_1 q_2 - (\lambda\nu)(q_1 + q_2) + (\mu^2 + \nu^2) = 0$$

அதாவது

$$(\mu^2 + \lambda^2)\frac{b^2\nu^2 + c^2\mu^2 - k^2\mu^2}{a^2\mu^2 + b^2\lambda^2} - \lambda\nu\frac{2b^2\lambda\nu}{a^2\mu^2 + b^2\lambda^2} + (\mu^2 + \nu^2) = 0$$

அதாவது $$(\mu^2+\lambda^2)(b^2\nu^2+c^2\mu-k^2\mu^2)-2b^2\lambda^2\nu^2 + (\mu^2+\nu^2)(a^2\mu^2+b^2\lambda^2)=0$$

அதாவது $$(b^2+c^2-k^2)\lambda^2+(c^2+a^2-k^2)\mu^2 + (a^2+b^2)\nu^2=0$$

என்று கிடைக்கிறது. இப்பொழுது (x_0, y_0, z_0) என்பது நகரும் நேர்கோட்டின்மீது ஏதாவதொரு புள்ளி என்றால்,

$$\lambda = x_0, \mu = y_0, \nu = z_0 - k$$

எனக் கொள்ளலாம்.

ஆகவே, $$(b^2+c^2-k^2)x_0^2+(c^2+a^2-k^2)y_0^2 + (a^2+b^2)(z_0-k)^2=0$$

என்றும், இதிலிருந்து நேர்கோட்டின் வரைபரப்பின் சமன்பாட்டை

$$(b^2+c^2-k^2)x^2+(c^2+a^2-k^2)y^2+(a^2+b^2)(z-k)^2=0$$

என்றும் அடைகிறோம்.

கணக்கு 6. சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடு தளங்கள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று தொடு தளங்களின் சமன்பாடுகளை, (105·4) ஐப் பயன்படுத்தி,

$$l_1x+m_1y+n_1z=\sqrt{l_1^2a^2+m_1^2b^2+n_1^2c}$$

$$l_2x+m_2y+n_2z=\sqrt{l_2^2a^2+m_2^2b^2+n_2^2c^2}$$

$$l_3x+m_3y+n_3z=\sqrt{l_3^2a^2+m_3^2b^2+n_3^2c^2}$$

என்று எழுதலாம். இவற்றிலிருந்து $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ ஆகியவற்றை நீக்கிக் கிடைப்பதுதான் வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

$l_1, m_1, n_1;\ l_2, m_2, n_2;\ l_3, m_3, n_3$ என்பன தளங்களின் செங்குத்துக் கோடுகளின் திசை விகிதங்களாகும். ஆனால், இச் செங்குத்துக் கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

ஆகவே §12-ல் உள்ள கணக்கு 6-லிருந்து

$$\left.\begin{array}{l} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{array}\right\}$$

என்றும், மேலும்

$$\left.\begin{array}{l} m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 = 0 \\ n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3 = 0 \\ l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 = 0 \end{array}\right\}$$

என்றும் அடைகிறோம். இப்பொழுது (1)-ல் உள்ள சமன்பாடுகள் மூன்றையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டக் கிடைப்பதாவது :

$$\begin{aligned} x^2(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) &+ y^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \\ &+ z^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + 2yz(m_1n_1 + m_2n_2 \\ &+ m_3n_3) + 2zx(n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3) \\ &+ 2xy(l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3) \\ = a^2(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) &+ b^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) \\ &+ c^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \end{aligned}$$

அதாவது,

$$\begin{aligned} x^2(1) + y^2(1) + z^2(1) + 2yz(0) + 2zx(0) + 2xy(0) \\ = a^2(1) + b^2(1) + c^2(1). \end{aligned}$$

அதாவது,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

இச் சமன்பாடு வேண்டிய சமன்பாடாகும். இச் சமன்பாடு ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கிறது. இக் கோளத்திற்குக் குத்துத் தொடுதளக் கோளம் (director sphere) எனப் பெயர்.

கணக்கு 7. ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுகோடுகளை, சமன்பாடு

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவுக்கு வரைய முடியுமானால், நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நகரும் புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். இப் புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும், கூம்பின் சமன்பாடு,

$$T_0^2 - SS_0 = 0$$

ஆகும். அதாவது

$$(axx_0 + byy_0 + czz_0 - 1)^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2 - 1)(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1) = 0$$

ஆகும். (x_0, y_0, z_0)-லிருந்து ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுகோடுகளை, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வளைவுருவுக்கு வரையமுடியுமாகையால், இத் தழுவும் கூம்பின் மூன்று பிறப்பிகள், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாக இருக்கும். ஆகவே, இத் தழுவும் கூம்பின் சமன்பாட்டில்

(x^2-ன் குணகம்) + (y^2-ன் குணகம்) + (z^2-ன் குணகம்)

பூச்சியமாகும். ஆகவே,

$$\{a^2x_0^2 - a(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1)\} + \{b^2y_0^2 - b(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1)\} + \{c^2z_0^2 - c(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1)\} = 0$$

அதாவது

$$-a(b+c)x_0^2 - b(c+a)y_0^2 - c(a+b)z_0^2 + (a+b+c) = 0.$$

இதிலிருந்து (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை

$$a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 - (a+b+c) = 0$$

என்று பெறுகிறோம்.

கணக்கு 8. ஒரு தளம், ஆதியிலிருந்து மாறிலி d தூரத்தில் உள்ளவாறு நகருகிறது. இத் தளம், சமன்பாடு

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவை வெட்டும், நீள் வளைவின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நீள் வளைவின் மையப் புள்ளி (x_0, y_0, z_0) என்றால், தளத்தின் சமன்பாடு

$$T_0 - S_0 = 0$$

ஆகும். அதாவது

$$(axx_0 + byy_0 + czz_0 - 1) - (ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 - 1) = 0$$

ஆகும்.

இதைச் சுருக்க

$$axx_0 + byy_0 + czz_0 - (ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2) = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. இத் தளம் ஆதியிலிருந்து d தூரத்தில் உள்ளதாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே,

$$d^2 = \frac{[(ax_0)(0)+(by_0)(0)+(cz_0)(0)-(ax_0^2+by_0^2+cz_0^2)]^2}{(ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2}$$

அதாவது

$$(ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2)^2 - d^2(a^2x_0^2 + b^2y_0^2 + c^2z_0^2) = 0$$

இதிலிருந்து (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$(ax + by + cz)^2 + d^2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) = 0$$

என்றாகிறது.

§107. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடு $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 10 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவின், புள்ளி $(3, 2, 1)$ இடத்துத் தொடு தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(2) சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியிடத்துத் தொடு தளம், கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளிலும், P-லிருந்து கூற்றச்சுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள் L, M, N என்ற புள்ளிகளிலும் வெட்டுகின்றன என்றால்

$$OA \cdot OL,\ OB \cdot OM,\ OC \cdot ON$$

என்பன மாறிலிகள் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: Pஐ (x_1, y_1, z_1) எனக் கொண்டால்,

$$OA = \frac{a^2}{x_1},\ OB = \frac{b^2}{y_1},\ OC = \frac{c^2}{z_1}$$

$$OL = x_1,\ OM = y_1,\ ON = z_1]$$

(3) சமன்பாடு $3x + 4y + 3z - 4 = 0$ குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு $3x^2 - 2y^2 + z^2 - 4 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

(4) சமன்பாடு $3x + 4y + 3z = 0$ குறிக்கும் தளத்திற்கு இணையாக உள்ளவாறும், சமன்பாடு $3x^2 - 2y^2 + z^2 - 4 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுமாறும் உள்ள தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(5) சமன்பாடுகள்

$$x + 9y - 3z = 0, \quad 3x - 3y + 6z - 5 = 0$$

குறிக்கும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லுமாறும், சமன்பாடு $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 5 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுமாறும் உள்ள தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : ஒரு தொடு தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$(3x - 3y + 6z - 5) + \lambda(x + 9y - 3z) = 0$$

எனக் கொள்க. இச் சமன்பாட்டை

$$2xx_1 - 6yy_1 + 3zz_1 - 5 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடுக. புள்ளி (x_1, y_1, z_1), கூம்பு வளைவுருவின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும்.]

(6) சமன்பாடுகள் $y = mx + c$, $z = 0$ குறிக்கும் கோட்டின் வழியாகச் சென்று கொண்டே, சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + k^2z^2 - a^2 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவைத் தொடும் தளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$(y - mx - c) + \frac{k\sqrt{c^2 - a^2m^2 - a^2}}{a} z = 0$$

$$(y - mx - c) - \frac{k\sqrt{c_2 - a^2m^2 - a^2}}{a} z = 0$$

எனக் காட்டுக.

(7) சமன்பாடுகள் $y = mx + c$, $z = 0$ குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடுகள்

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2(1 + k^2)}{k^2}, \quad z = 0$$

குறிக்கும் வட்டத்தைத் தொட்டால், இக் கோட்டின் வழியாகச் சென்று கொண்டே, சமன்பாடு $x^2 + y^2 + k^2z^2 - a^2 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவைத் தொடும் தளங்கள். ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

(8) l என்பது, தளம் yOz-ல் உள்ள ஒரு கோடு. l வழியாகச் சென்றுகொண்டே, சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ குறிக்கும் பரவளை வுருவைத் தொடும் தளங்கள் செங்குத்தானவையானல், சமன்பாடுகள் $y^2 = (a+b)(2z+a), x = 0$ குறிக்கும் பரவளைவை l தொடும் எனக் காட்டுக.

(9) சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டே நகரும் ஒரு தளத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: செங்குத்துக் கோட்டின் அடி (x_0, y_0, z_0) என்ருல் தளத்தின் சமன்பாடு

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0$$

ஆகும். தளம், நீள்வளைவுருவைத் தொடுவதால், (105·3)-ன் மூலம்,

$$a^2x_0^2 + b^2y_0^2 + c^2z_0^2 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0.]$$

(10) சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டே நகரும் ஒரு தளம், கூற்றச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(11) சமன்பாடு $\frac{a^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டே இரண்டு இணையான தொடுதளங்கள் நகர்கின்றன. இத் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம், மாறிலி k. ஆதியிலிருந்து இத் தளங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் வரை பரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: செங்குத்துக் கோட்டின் மேல் (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டால், இக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் x_0, y_0, z_0 ஆகும். தொடுதளங்களின் சமன்பாடு $x_0x + y_0y + z_0z + d = 0$ என்றிருக்கும். ஆனல், (105·3)-ன்

மூலம் $d^2 = a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2 + c^2 z_0^2$. எனவே, தொடு தளங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z \pm \sqrt{a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2 + c^2 z_0^2}$$

இங்கு $k^2 = 4 \cdot \dfrac{a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2 + c^2 z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.]

(12) சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டே நகரும் ஒரு தளத்தின் x, y, z அச்சு வெட்டுகளின் தலைகீழ்ப் பின்னங்களின் (reciprocals) கூட்டுத் தொகை மாறிலி k-க்குச் சமமாக உள்ளது. ஆதியிலிருந்து இத் தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் வரை பரப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(13) ஒரு தளம், சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தொட்டுக்கொண்டும், நிலைத்த புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் சென்றுகொண்டும் நகருகிறது. இத் தளத்தின், (x_1, y_1, z_1) இடத்துச் செங்கோடு பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டை

$$lx + my + nz - (lx_1 + my_1 + nz_1) = 0$$

என்று கொண்டால்,

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 - (lx_1 + my_1 + nz_1)^2 = 0$$

மேலும், (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியைச் செங்கோட்டின்மீது எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{x_0 - x_1}{l} = \frac{y_0 - y_1}{m} = \frac{z_0 - z_1}{n} = k.$$

l, m, n ஆகியவற்றை நீக்குக.]

(14) ஒரு தளம், சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டும், நிலைத்த புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் சென்று கொண்டும் நகருகிறது. ஆதியிலிருந்து இத் தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடு பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(15) சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$ குறிக்கும் பரவளைவுருவின் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தளங்கள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: சமன்பாடு (105·5) ஐயும், § 106-ல் உள்ள கணக்கு 6-ல் மேற்கொள்ளப்பட்ட முறையையும் பயன்படுத்துக.]

(16) ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து, ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுகோடுகளை, சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2-r^2=0$ குறிக்கும் கோளத்திற்கு வரைய முடியுமானால், நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$$

எனக் காட்டுக.

(17) ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து, ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடு கோடு, சமன்பாடு $ax^2+by^2+2cz=0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவுக்கு வரைய முடியுமானால், நகரும் புள்ளின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$ab(x^2 + y^2) + 2c(a + b)z - c^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

(18) ஒரு நகரும் புள்ளியிலிருந்து, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவுக்கு வரையப்பட்ட தழுவும் கூம்பை, தளம் $z = 0$ ஆனது, செவ்வக அதிபர வளைவில் வெட்டினால், நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரை சமன்பாடு

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: செவ்வக அதி பரவளைவின் சமன்பாடுகள்

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2$$

$$-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right) = 0, \; z = 0$$

ஆகும். இங்கு x^2-ன் குணகம் $+$ y^2-ன் குணகம் $= 0$.]

(19) ஒரு நகரும் புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டு, சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ குறிக்கும் நீள் வளை வுருவைத் தழுவும் கூம்பை, தளம் $z=0$ ஆனது, ஒரு வட்டத்தில் வெட்டினால், நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு $z^2-c^2=0$ எனக் காட்டுக.

(20) ஒரு நகரும் புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டு சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பை, தளம் $z=0$ ஆனது, ஒரு வட்டத்தில் வெட்டினால், நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ x=0$$

அல்லது $$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ y=0$$

எனக் காட்டுக.

(21) சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2-25=0$ குறிக்கும் கோளத்தை, ஒரு தளம், $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் வெட்டுகிறது. இத் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: தளத்தின் சமன்பாடு $T_1-S_1=0$ ஆகும். அதாவது

$$(x+2y+3z-25)-(1^2+2^2+3^2-25)=0$$

என்பதாகும்.]

(22) சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z-4=0$ குறிக்கும் கோளத்தின் மேலுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(3, 3, 3)$ என்றால், இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு: கோளத்தின் சமன்பாடு $S=0$ என்றால், வேண்டிய சமன்பாடுகள் $S=0,\ T_1-S_1=0$.

இங்கு $x_1=3,\ y_1=3,\ z_1=3$.]

(23) சமன்பாடு $3x^2+2y^2+z^2-25=0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைச் சமன்பாடு $3x+4y+3z-20=0$ குறிக்கும் தளம், வெட்டும் நீள்வளையின் மையப் புள்ளியைக் காண்க.

(24) A, B, C என்பன ஒரு நீள் வளைவுருவின் தலையாய அச்சுகளின் முனைகள். தளம் ABC, நீள் வளைவுருவை வெட்டும் நீள் வளைவின் மையமும், முக்கோணம் ABC-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியும் ஒரே புள்ளியாகும் எனக் காட்டுக.

(25) ஒரு நிலைத்த புள்ளி (f, g, h) வழியாகச் சென்று கொண்டே நகரும் ஒரு தளம், சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2-1=0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவை வெட்டும் நீள்வளைவின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$ax(x-f)+by(y-g)+cz(z-h)=0$$

எனக் காட்டுக.

(26) சமன்பாடு $px^2+qy^2+cz^2-1=0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டே நகரும் ஒரு தளம், சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2-1=0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவை வெட்டும் நீள்வளைவின் மையப் புள்ளியின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$(ax^2+by^2+cz^2)^2-\left(\frac{a^2x^2}{p}+\frac{b^2y^2}{q}+\frac{c^2z^2}{r}\right)=0$$

எனக் காட்டுக.

(27) ஒரு தளம், தனது x, y, z அச்சுத் துண்டுகளின் தொகை பூச்சியம் ஆகும் வண்ணம் நகருகின்றது. இத் தளம், சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2-1=0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவை வெட்டும் நீள் வளைவின் மையப் புள்ளியின் இயங்கு வரை, சமன்பாடு

$$bc\,yz+ca\,zx+ab\,xy=0$$

குறிக்கும் கூம்பாகும் எனக் காட்டுக.

(28) P என்பது ஒரு நகரும் புள்ளி. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுக்கு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுதளங்களை, இப் புள்ளியிலிருந்து வரைய இயலுமாறு, இப்புள்ளி நகருகிறது. தளங்களின் தொடுபுள்ளி வழியாகச் செல்லும் தளம், நீள்வளைவுருவை வெட்டும். நீள்வளைவின் மையப் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{c^2}{z^2}\right)^2-(x^2+y^2+{}^2z)=0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $P(x_1, y_1, z_1)$ குத்துத் தொடுதளக் கோளத்தின் மேல் நகருகிறது. ஆகவே,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

மேலும், நீள் வளைவின் மையப் புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) என்றும் தொடுகைத் தளத்தை $T_1 = 0$ என்றும் அல்லது வேறு விதமாக $T_0 - S_0 = 0$ என்றும், எழுதலாம். இச்சமன்பாடுகளை ஒப்பிட்டு x_1, y_1, z_1 ஆகியவற்றைக் கண்டு, அவற்றை நீக்கி x_0, y_0, z_0 ஆகியவற்றில் ஒரு தொடர்பைக் காண்க.)

(29) ஆதியிலிருந்து k தூரத்தில் இருக்குமாறு நகரும் ஒரு தளத்தின், சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைப் பொறுத்த இசைப் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : இசைப் புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) என்று கொண்டால், சமன்பாடு

$$axx_0 + byy_0 + czz_0 - 1 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $k^2 = \dfrac{1}{(ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2}$.]

(30) ஒரு தளம், சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தொட்டுக் கொண்டே நகருகிறது. சமன்பாடு $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைப் பொறுத்த இத்தளத்தின் இசைப் புள்ளியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(31) k, ஒரு மாறி. தளம் $lx + my + nz - p = 0$-ன், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} - 1 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைப் பொறுத்த இசைப் புள்ளியின் இயங்குவரை, சமன்பாடுகள்

$$\frac{px - a^2 l}{l} = \frac{py - b^2 m}{m} = \frac{pz - c^2 n}{n}$$

குறிக்கும் கோடு எனக் காட்டுக.

விடைகள்

(1) $3x-3y+2z-5=0$. (3) $(1, -2, 3)$

(4) $3x-4y+3z+4=0, \quad 3x-4y+3z-4=0$

(5) $4x+6y+3z-5=0, \quad 2x-12y+9z-5-0$

(9) $(x_z+y^2+z^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0$

(10) $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}-9=0$

(11) $4k^2(x^2+y^2+z^2)=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$

(12) $k^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=(x+y+z)^2$

(13) $a^2(x-x_1)^2+b^2(y-y_1)^2+c^2(z-z_1)^2-[x_1(x-x_1)$
$+y_1(y-y_1)+z_1(z-z_1)]^2=0$

(14) $a^2x^2+{}_3{}^2y^2+c^2z^2-(xx_1+yy_1+zz_1)^2=0$

(15) $2cz+(a^2+b^2)=0$

(21) $x+2y+3z-14=0$

(22) $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z-4=0, \; x+y+z-9=0$

(29) $k^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0$

(30) $\frac{A^2x^2}{a}+\frac{B^2y^2}{b}+\frac{c^2z^2}{c}-1=0.$

§ 108. இப்படிக் கூம்பின் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

ஒரு இருபடிச் கூம்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகவும், அதன் சமன்பாடு

$$S = ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$
$$+2ux+2vy+2wz+d=0$$

என்றும் கொள்வோம். இக் கூம்பின்மேல் (x_1, y_1, z_1) என்ற உள்ளது என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம், § 99-ல் எடுத்தாளப் பட்டுள்ள முறையையாவது அல்லது § 102-ல் எடுத்தாளப் பட்டுள்ள முறையையாவது பயன்படுத்தி, இக் கூம்பின் (x_1, y_1, z_1) — இடத்துத் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டை

$$T_1 = axx_1+byy_1+czz_1+2f\frac{yz_1+y_1z}{2}+2g\frac{zx_1+z_1x}{2}$$
$$+2h\frac{xy_1+x_1y}{2}+2u\frac{x+x_1}{2}+2v\frac{y+y_1}{2}$$
$$+2w\frac{z+z_1}{2}+d=0$$

என்று அடையலாம்.

§ 109. ஒரு தளம் ஒரு கூம்பைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனை

இங்குக் குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

குறிக்கும் கூம்பைச் சமன்பாடு

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம். (x_1, y_1, z_1) என்பது ஒரு தொடுபுள்ளி என்றால், இத் தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$axx_1 + byy_1 + czz_1 + f(yz_1 + y_1z) + g(zx_1 + z_1x) + h(xy_1 + x_1y) = 0$$

என்றும், அதாவது

$$(ax_1 + hy_1 + gz_1)\,x + (hx_1 + by_1 + fz_1)\,y + (gx_1 + fy_1 + cz_1)\,z = 0$$

என்றும் எழுதலாம். இச் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{ax_1 + hy_1 + gz_1}{\lambda} = \frac{hx_1 + by_1 + fz_1}{\mu} = \frac{gx_1 + fy_1 + cz_1}{\nu}$$

இதிலுள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் q-க்குச் சமம் என்று கொண்டால்,

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + hy_1 + gz_1 - \lambda q &= 0 \\ hx_1 + by_1 + fz_1 - \mu q &= 0 \\ gx_1 + fy_1 + cz_1 - \nu q &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (109{\cdot}1)$$

மேலும், புள்ளி (x_1, y_1, z_1), தளத்தின் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். ஆகவே,

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 = 0 \quad \cdots \quad (109{\cdot}2)$$

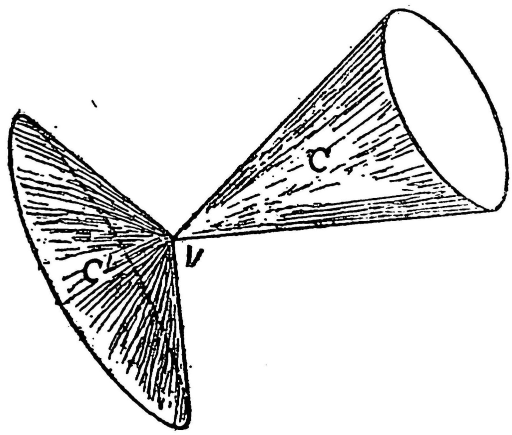
(109·1), (109·2) என்ற நான்கு தொடர்புகளிலிருந்தும் x_1, y_1, z_1, q ஆகியவற்றை நீக்க, வேண்டிய நிபந்தனை

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \lambda \\ h & b & f & \mu \\ g & f & c & \nu \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots \quad (109{\cdot}3)$$

என்று கிடைக்கிறது.

§110. பிறழ்ச்சிக் கூம்பு (Reciprocal Cone)

ஒரு கூம்பு, V என்ற புள்ளியை உச்சியாகக் கொண்டுள்ளது (படம் 57). ஒரு தளம், இக் கூம்பைத் தொட்டுக் கொண்டே



படம் 57.

சுழல்கின்றது. V-ன் வழியாகச் சென்று கொண்டும், இத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருந்து கொண்டும் சுழன்று பிறப்பிக்கும் கூம்பு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பு என்று வழங்கப்படுகின்றது. படத்தில் C என்பது, கொடுக்கப்பட்ட கூம்பையும், C' என்பது, பிறழ்ச்சிக் கூம்பையும் குறிக்கின்றன.

§111. பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாடு

இங்குக் குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \quad \ldots \quad (111 \cdot 1)$$

குறிக்கும் இருபடிக் கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். கூம்பு $(111 \cdot 1)$-ன் உச்சி ஆதி O-ல் உள்ளது என்பது நாம் அறிந்ததே. இப்பொழுது $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின்மீது எடுத்துக் கொள்வோம். அப்படியாயின், OP-ன் திசை விகிதங்கள்

$$x_0 - 0, \ y_0 - 0, \ z_0 - 0$$

அதாவது, x_0, y_0, z_0

ஆகும். மேலும், O-ன் வழியாகச் செல்லுமாறும் OP-க்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறும் உள்ள தளம், கூம்பு $(111 \cdot 1)$ஐத் தொடும்.

இத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0$$

என்பதை நாம் எளிதிற் காணலாம். இத் தளம், கூம்பைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையை

$$\begin{vmatrix} a & h & g & x_0 \\ h & b & f & y_0 \\ g & f & c & z_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

என்று, வினாவு (109·3)-லிருந்து காணலாம். ஆகவே, பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0$$

என்ருகிறது. இதை விரித்தெழுத

$$(bc - f^2)x^2 + (ca - g^2)y^2 + (ab - h^2)z^2 + 2(gh - af)yz + 2(hf - bg)zx + 2(fg - ch)xy = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது. மேலும்

$$bc - f^2 = A, \ ca - g^2 = B, \ ab - h^2 = C,$$
$$gh - af = F, \ hf - bg = G, \ fg - ch = H$$

என்ருல், சமன்பாடு

$$Ay^2 + By^2 + cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxg = 0$$

என்ருகிறது. இங்கு A, B, C, F, G, H என்பன,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக் கோவையில் முறையே a, b, c, f, g, h ஆகியவற்றின் இணைக் காரணிகள் (cofactors) ஆகும் என்பதை எளிதிற் காணலாம்.

மேலும்

$$BC - F^2 = a\triangle,\ CA - G^2 = b\triangle,\ AB - H^2 = C\triangle,$$
$$GH - AF = f\triangle,\ HF - BG = g\triangle,\ FG - CH = h\triangle$$

என்ற விளைவுகளை நாம் அறிந்ததே,

இந்த விளைவுகளிலிருந்து, சமன்பாடு

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + 2\,F\,yz + 2\,G\,zx + 2\,H\,xy = 0$$

குறிக்கும் இருபடிக் கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$(a\triangle)\,x^2 + (b\triangle)\,y^2 + (c\triangle)\,z^2 + 2\,(\triangle f)\,yz$$
$$+ 2\,(\triangle g)\,zx + 2\,(\triangle h)\,xy = 0$$

அதாவது $\quad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,fyz + 2\,gzx + 2\,hxy = 0$

ஆகும் என்று அறிகிறோம்.

இதிலிருந்து ஓர் இருபடிக் கூம்பு C-ன் பிறழ்ச்சிக் கூம்பு C' ஆனால்,

(i) C', ஓர் இருபடிக் கூம்பாகும் என்றும்

(ii) C'-ன் பிறழ்ச்சிக் கூம்பு C என்றும் அறிகிறோம்.

§ 112. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,fyz + 2\,gzx + 2\,hxy = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள மூன்று தொடுதளங்களை உடையதாக இருந்தால்,

$$bc + ca + ab - (f^2 + g^2 + h^2) = 0$$

எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$(bc - f^2)\,x^2 + (ca - g^2)\,y^2 + (ab - h^2)\,z^2 + 2\,(gh - af)\,yz$$
$$+ 2\,(hf - bg)\,zx + 2\,(fg - ch)\,xy = 0$$

என்று நாம் அறிவோம். கொடுக்கப்பட்ட கூம்பின் தொடுதளங்களில் மூன்று, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தால், அதன் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் பிறப்பிகளில் மூன்று, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும். இதனால், பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாட்டில்,

$$(x^2\text{-ன் குணகம்}) + (y^2\text{-ன் குணகம்}) + (z^2\text{-ன் குணகம்}) = 0$$

ஆகும். எனவே,

$$(bc - f^2) + (ca - g^2) + (ab - h^2) = 0$$

அதாவது $\quad bc + ca + ab - (f^2 + g^2 + h^2) = 0$

கணக்கு 2. சமன்பாடு

$$lx + my + nz = 0$$

குறிக்கும் தளம், சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

குறிக்கும் கூம்பின் தொடுதளமானல்,

$$bcl^2 + cam^2 + abn^2 = 0 \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

தொடு புள்ளியை (x_1, y_1, z_1) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்தின் சமன்பாடு

$$T_1 = axx_1 + byy_1 + czz_1 = 0$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டை, $lx + my + nz = 0$-வுடன் ஒப்பிட,

$$\frac{ax_1}{l} = \frac{by_1}{m} = \frac{cz_1}{n}$$

என்று கிடைக்கின்றது. மேலும், இம் மூன்று உறுப்புகளையும் q-க்குச் சமம் எனக் கொள்ள,

$$x_1 = \frac{ql}{a}, \; y_1 = \frac{qm}{b}, \; z_1 = \frac{qn}{c}$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆனல், புள்ளி (x_1, y_1, z_1), கூம்பின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும்.

ஆகவே, $$a\left(\frac{ql}{a}\right)^2 + b\left(\frac{qm}{b}\right)^2 + c\left(\frac{qn}{c}\right)^2 = 0$$

அதாவது $$q^2\left(\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}\right) = 0$$

அதாவது $$bcl^2 + cam^2 + abn^2 = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

§ 113. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ குறிக்கும் கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(2) சமன்பாடு

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 2yz + 4zx + 6xy = 0$$

குறிக்கும் கூம்பின் தொடு தளங்கள், சமன்பாடு $19x^2 + 11y^2 + 3z^2 + 6yz - 10zx - 26xy = 0$ குறிக்கும் கூம்பின் பிறப்பிகளுக்குச் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : இரண்டாவது கூம்பு, முதற் கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பு எனக் காட்டுக.]

(3) கூற்றுத் தளங்கள் மூன்றையும் தொடும் ஓர் இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாடு

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2\,bcyz-2\,cazx-2\,abxy=0$$

என்ற வடிவில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பு, கூற்றச்சுகளின் வழியாகச் செல்லும். ஆகவே, இப் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் சமன்பாட்டை $fyz+gzx+hxy=0$ எனக் கொள்ளலாம். இப் பிறழ்ச்சிக் கூம்பின் பிறழ்ச்சிக் கூம்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 0 & h & g & x \\ h & 0 & f & y \\ g & f & 0 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}=0$$

என்றிருக்கும்.]

விடைகள்

(1) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=0.$

§ 114. ஒரு கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் உருளை

இங்குக் குறிப்பாகச் சமன்பாடு

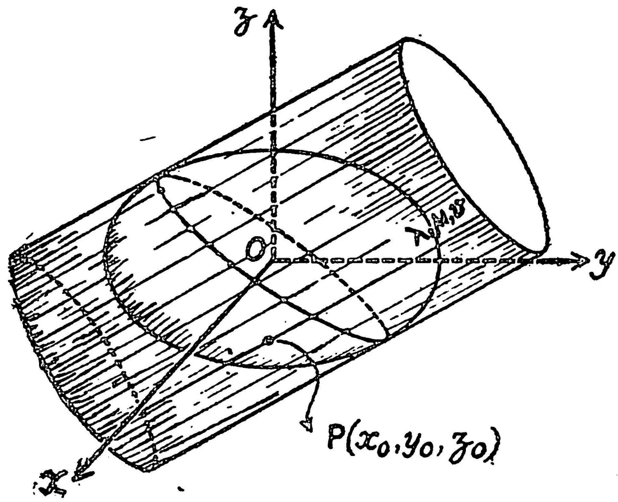
$$S=ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் உருளையின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இவ் உருளையின் பிறப்பிகளின் திசை விகிதங்களை

$$\lambda,\ \mu,\ N$$

எனக் கொள்வோம் (படம் 58). இங்கு λ, μ, v ஆகியவை மாறிலிகள்.

இப்பொழுது $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை உருளையின்மீது எடுத்துக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,



படம் 58.

(x_0, y_0, z_0)-ன் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu}$$

ஆகும். இப் பிறப்பி, கூம்பு வளைவுருவை வெட்டும் புள்ளிகளை

$$(x_0 + k\lambda, y_0 + k\mu, z + k\nu)$$

எனக் குறித்தால், k-ன் மதிப்புகளை

$$a(x_0 + \lambda k)^2 + b(y_0 + \mu k)^2 + c(z_0 + \nu k)^2 - 1 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து அடையலாம்.

அதாவது

$$(a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2)k^2 + 2(a\lambda x_0 + b\mu y_0 + c\nu z_0)k + S_0 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து அடையலாம். ஆனால், பிறப்பி கூம்பு வளைவுருவைத் தொடுகின்றது. ஆகவே, இவ் வெட்டுப் புள்ளிகள் இணைந்த புள்ளிகளாகும். எனவே, இச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியமாகும். ஆகவே,

$$(a\lambda x_0 + b\mu y_0 + c\nu y_0)^2 - (a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2) S_0 = 0$$

இதிலிருந்து (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை

அதாவது கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் உருளையின் சமன்பாட்டை

$$(a\lambda x+b\mu y+c\nu z)^2-(a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2)(ax^2+by^2+cz^2)=0 \quad \ldots \quad (114\cdot1)$$

என்று அடைகிறோம்.

இவ் உருளையின் தொடு புள்ளிகள், சமன்பாடுகள்

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0, \quad a\lambda x+b\mu y+c\nu z=0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவின்மேல், அதாவது கூம்பு வளைவுருவைத் தளம் $a\lambda x+b\mu y+c\nu z=0$ வெட்டும் கூம்பு வளைவின்மேல் அமைகின்றன என்பதை எளிதிற் காணலாம். இங்குத் தளம் $a\lambda x+b\mu y+c\nu z=0$. தொடுகைத் தளம் (plane of contact) என்று வழங்கப்படுகிறது.

§115. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. z அச்சுக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைத்த திசைக்கு இணையான பிறப்பிகளைக் கொண்டும், சமன்பாடு

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவிக்கொண்டும் உள்ள உருளையைத் தளம் $z=0$ ஆனது, ஒரு பரவளையில் வெட்டும் எனக் காண்க.

உருளையின் பிறப்பிகள், λ, μ, ν ஆகியவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட ஒரு நிலைத்த திசைக்கு இணையாக உள்ளதாகக் கொள்வோம். இந் நிலைத்த திசை, z அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால், z அச்சின் திசை விகிதங்கள்

$$0, 0, 1$$

ஆகும். ஆகவே,

$$(\lambda)(0)+(\mu)(0)+(\nu)(1)=0$$

அதாவது $\nu=0$.

மேலும், (114·1)-லிருந்து உருளையின் சமன்பாடு

$$(a\lambda x+b\mu y+c\nu z)^2-(a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2)(ax^2+b\mu^2+cz^2-1)=0$$

ஆகும் என்று அறிகிறோம். ஆனால் $\nu=0$. ஆகவே இச் சமன்பாடு

$$(a\lambda x+b\mu y)^2-(a\lambda^2+b\mu^2)(ax^2+by^2+cz^2-1)=0$$

என்று மாறுகிறது.

எனவே இவ் வுருளையை, $z = 0$ என்ற தளம் வெட்டும் வளையின் சமன்பாடுகளை

$$z = 0, (a\lambda x + a\mu y)^2 - (a\lambda^2 + b\mu^2)(ax^2 + b\mu^2 - 1) = 0$$

என்று எழுதலாம். இச் சமன்பாடுகளில் இரண்டாவதை மாற்றி எழுத, வளையின் சமன்பாடுகள்

$$ab(\mu^2 x^2 - 2\lambda xy + \lambda^2 y^2) - (a\lambda^2 + b\mu^2) = 0, \quad z = 0$$

என்றுகின்றன. இவற்றில் முதற் சமன்பாட்டின் இருபடி உறுப்புகள் ஒரு பூரண வர்க்கமாகையால், வளைவு ஒரு பரவளைவாகும்.

§ 116. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) $0, \sqrt{a^2 - b^2}, c$ ஆகிய எண்களை திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட நிலைத்த திசைக்கு இணையாகப் பிறப்பிகளைக் கொண்டும், சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவிக் கொண்டும் உள்ள உருளையைத் தளம் $z = 0$ ஆனது, ஒரு வட்டத்தில் வெட்டும் எனக் காட்டுக.

(2) சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவைத் தழுவும் உருளை ஒன்று மாறுகின்றது. இவ் உருளையைத் தளம் $z = 0$ ஆனது, வெட்டும் வளைவு ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவானால், ஆதி வழியாகச் செல்லுமாறும், தொகைத் தளத்திற்கும் செங்குத்தாக உள்ளவாறும் உள்ள நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$b^2cx^2 + a^2cy^2 + ab(a+b)z^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

§ 117. செங்கோடுகள்

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் மையக் கூம்பு வளைவுருவின் (x_1, y_1, z_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளை முதலில் காண்போம்.

(x_1, y_1, z_1) இடத்துத் தொடு தளத்தின் சமன்பாடு

$$axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1 = 0$$

ஆகும். ஆகவே, இத் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$ax_1, \quad by_1, \quad cz_1 \quad \text{ஆகும்.}$$

எனவே, கூம்பு வளைவுருவின் (x_1, y_1, z_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$ax_1, \quad by_1, \quad cz_1$$

ஆகும். ஆகவே, இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_1}{ax_1} = \frac{y - y_1}{by_1} = \frac{z - z_1}{cz_1}$$

ஆகும்.

அடுத்தபடியாகச் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 - 2cz = 0$$

குறிக்கும் பரவளைவுருவின் (x_1, y_1, z_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இங்கு (x_1, y_1, z_1) இடத்துத் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$axx_1 + byy_1 - c(z + z_1) = 0$$

ஆகும். ஆகவே, இத் தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$ax_1, \quad by_1, \quad -c$$

ஆகும். எனவே, பரவளைவுருவின் (x_1, y_1, z_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$ax_1, \; by_1, \; -c$$

ஆகும். ஆகவே, இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_1}{ax_1} = \frac{y - y_1}{by_1} = \frac{z - z_1}{-c}$$

ஆகும்.

§ 118. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு கூம்பு வளைவுருவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கை

இங்குக் குறிப்பாக $A(f, g, h)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$$

குறிக்கும் மையக் கூம்புவளைவுருக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண முயல்வோம்.

இச் செங்கோடுகளின் ஒன்றின் அடி (x_1, y_1, z_1) என்ருல், இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{ax_1} = \frac{y-y_1}{by_1} = \frac{z-z_1}{cz_1}$$

ஆகும். ஆனுல், இச் செங்கோடு (f, g, h) வழியாகச் செல்லுகிறது.

ஆகவே, $$\frac{f-x_1}{ax_1} = \frac{g-y_1}{by_1} = \frac{h-z_1}{cz_1}.$$

இம் மூன்று பின்னங்களையும் k எனக் கொண்டால்,

$$x_1 = \frac{f}{1+ak}, \quad y_1 = \frac{g}{1+bk}, \quad z_1 = \frac{h}{1+ck} \qquad (118 \cdot 1)$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆனுல், (x_1, y_1, z_1) கூம்பு வளைவுருவின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். எனவே,

$$a\left(\frac{f}{1+ak}\right)^2 + b\left(\frac{g}{1+bk}\right)^2 + c\left(\frac{h}{1+ck}\right)^2 - 1 = 0$$

இதில் பின்னங்களை நீக்க, k-ல் 6 படியுள்ள ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

ஆகவே, பொதுவாக k ஆறு மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கின்றது. இந்த ஆறு மதிப்புகளுக்குத் தக்கவாறு $(118 \cdot 1)$-ல் இருந்து ஆறு செங்கோட்டடிகள் கிடைக்கின்றன. அதாவது, (f, g, h)-லிருந்து கூம்பு வளைவுருவுக்கு ஆறு செங்கோடுகள் வரையலாம் என்ருகிறது.

மேலும், இச் செங்கோட்டடிகள், துணையலகுச் சமன்பாடுகள்

$$x = \frac{f}{1+a\alpha}, \quad y = \frac{g}{1+b\alpha}, \quad z = \frac{h}{1+c\alpha}$$

குறிக்கும் ஒரு வளைவின்மேல் அமைகின்றன என்றும் தெரிகின்றது. இங்கு α என்பது துணையலகு. இப்பொழுது இவ் வளைவு ஒரு முப்படி வளைவு என்று, அதாவது இவ் வளைவு ஒரு தளத்தை மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது என்று காட்டுவோம். இதற்காகச் சமன்பாடு

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

குறிக்கும் தளத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இத் தளத்தை இவ் வளைவு வெட்டும் புள்ளிகளைத் தரும் α-ன் மதிப்புகளை

$$A\left(\frac{f}{1+a\alpha}\right)+B\left(\frac{g}{1+b\alpha}\right)+C\left(\frac{h}{1+c\alpha}\right)+D=0$$

என்பதன் மூலம் அடைகிறோம். இச்சமன்பாடு α-ல் ஒரு முப்படிச் சமன்பாடாகும். ஆகவே, α-க்கு மூன்று மதிப்புகள் உண்டு. ஆகவே, தளத்தை வளைவு வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை மூன்று என்றாகிறது.

அடுத்ததாக, ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு மையக் கூம்பு வளைவுருவுக்கு வரையப்படும் ஆறு செங்கோடுகளின் வழியாகவும் ஓர் இருபடிக் கூம்பு செல்லுகின்றது எனக் காட்டுவோம். இதற்காக $A(f, g, h)$-லிருந்து சமன்பாடு

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0$$

குறிக்கும் மையக் கூம்புவளைவுருவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இச் செங்கோடுகளின் அடிகள், சமன்பாடு

$$x=\frac{f}{1+a\alpha},\ y=\frac{g}{1+b\alpha},\ z=\frac{h}{1+c\alpha} \qquad (118\cdot2)$$

குறிக்கும் வளைவின்மேல் அமைகின்றன எனக் கண்டோம்.

இப்பொழுது $A(f, g, h)$ ஐ உச்சியாகக் கொண்டும், வளைவு $(118\cdot2)$ ஐப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகக் கொண்டும் உள்ள கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இதற்காக இக் கூம்பின்மேல் $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இப் பிறப்பி AP-ன் திசை விகிதங்கள் λ, μ, ν என்றால், இதன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-f}{\lambda}=\frac{y-g}{\mu}=\frac{z-h}{\nu}=q$$

ஆகும். ஆகவே, AP, வளைவு $(118\cdot2)$ ஐ வெட்டும் புள்ளியை

$$(f+q\lambda,\ \ g+q\mu,\ \ h+q\nu)$$

என்று கொள்ளலாம். இதே புள்ளியை, $(118\cdot2)$-ல் $\alpha=\alpha_1$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறுவதாகவும் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$\frac{f}{1+a\alpha_1}=+q\lambda,\ \frac{g}{1+b\alpha_1}=g+q\mu,\ \frac{h}{1+c\alpha_1}=h+q\nu.$$

இவற்றிலிருந்து கிடைப்பதாவது

$$f=(1+a\alpha_1)(f+q\lambda),$$
$$g=(1+b\alpha_1)(g+q\mu),$$
$$h=(1+c\alpha_1)(h+q\nu).$$

அதாவது $\lambda(q) + a\lambda(\alpha_1 q) - af(\alpha_1) = 0,$

$$\mu(q) + b\mu(\alpha_1 q) + bg(\alpha_1) = 0,$$

$$\nu(q) + c\nu(\alpha_1 q) + ch(\alpha_1) = 0,$$

இவற்றிலிருந்து q ஐயும், $(\alpha_1 q)$ ஐயும், α_1 ஐயும் நீக்கக் கிடைப்பதாவது :

$$\begin{vmatrix} \lambda & a\lambda & af \\ \mu & b\mu & bg \\ \nu & c\nu & ch \end{vmatrix} = 0$$

ஆனால் AP-ன் திசை விகிதங்களான λ, μ, ν என்பனவற்றை

$$x_0 - f,\ y_0 - g,\ z_0 - h$$

எனக் கொள்ளலாம். எனவே,

$$\begin{vmatrix} x_0 - f & a(x_0 - f) & af \\ y_0 - g & b(y_0 - g) & bg \\ z_0 - h & c(z_0 - h) & ch \end{vmatrix} = 0.$$

என்றும், இதிலிருந்து கூம்பின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x - f & a(x\ \ f) & af \\ y - g & b(y - g) & bg \\ z - h & c(z - h) & ch \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது $\begin{vmatrix} x - f & ax & af \\ y - g & by & bg \\ z - h & cz & ch \end{vmatrix} = 0$

என்றும் கிடைக்கின்றது. இஃது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு என்பதை எளிதிற் காணலாம். ஆகவே, இக் கூம்பு ஓர் இருபடிக் கூம்பாகும். (f, g, h)-லிருந்து வரையப்பட்ட ஆறு செங் கோடுகளும் இக் கூம்பின் பிறப்பிகள் என்பதை எளிதிற் காணலாம். ஆகவே, $(f, g\ h)$-லிருந்து வரையப்பட்ட ஆறு செங் கோடுகள் வழியாக ஓர் இருபடிக் கூம்பு செல்லுகின்றது என்றாகின்றது.

அடுத்ததாக $A(f, g, h)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 - 2\,cz = 0$$

குறிக்கும் பரவளைவுருவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

இச் செங்கோடுகளின் ஒன்றின் அடி (x_1, y_1, z_1) என்றால், இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{x-x_1}{ax_1} = \frac{y-y_1}{by_1} = \frac{z-z_1}{-c}$$

ஆகும். ஆனால் இச் செங்கோடு (f, g, h) வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே

$$\frac{f-x_1}{ax_1} = \frac{g-y_1}{by_1} = \frac{h-z_1}{-c}.$$

இம் மூன்று பின்னங்களையும் k எனக் கொண்டால்,

$$x_1 = \frac{f}{1+ak},\quad y_1 = \frac{g}{1+bk},\quad z_1 = h + ck \ldots (118\cdot3)$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆனால், (x_1, y_1, z_1) பரவளைவுருவின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். எனவே,

$$a\left(\frac{f}{1+ak}\right)^2 + b\left(\frac{g}{1+bk}\right)^2 - 2c\,(h+ck) = 0$$

இதில் பின்னங்களை நீக்க, k-ல் 5 படியுள்ள ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

ஆகவே, பொதுவாக k ஐந்து மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கின்றது. இவ்வைந்து மதிப்புகளுக்குத் தக்கவாறு (118·3)-லிருந்து ஐந்து செங்கோட்டடிகள் கிடைக்கின்றன. அதாவது (f, g, h)-லிருந்து பரவளைவுருவுக்கு ஐந்து செங்கோடுகள் வரையலாம் என்றாகிறது.

அடுத்ததாக இவ்வைந்து செங்கோடுகள் வழியாகவும் ஓர் இருபடிக் கூம்பு செல்லுகின்றது எனக் காட்டுவோம். இச் செங்கோடுகளின் அடிகள்,

$$\left(\frac{f}{1+ak},\ \frac{g}{1+bk},\ h+ck\right)$$

என்பவை. இங்கு k ஆனது ஐந்து மதிப்புகளைக் கொண்டது. இவ் வடிகள், துணையலகுச் சமன்பாடுகள்

$$x = \frac{f}{1+a\alpha}, \quad y = \frac{g}{1+b\alpha}, \quad z = h + c\alpha \quad \ldots (118\cdot4)$$

குறிக்கும் வளைவின் மேல் அமைகின்றன. இங்கு α என்பது துணை யலகு.

இப்பொழுது $A(f, g, h)$ ஐ உச்சியாகக் கொண்டும், வளைவு $(118\cdot4)$ ஐப் பிறப்பிக்கும் வளைவாகக் கொண்டும் உள்ள கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இதற்காக இக்கூம்பின் மேல் $P(x_0, y_0, z_0)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். பிறப்பி AP-ன் திசை விகிதங்கள் λ, μ, ν என்றால், இதன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-f}{\lambda} = \frac{y-g}{\mu} = \frac{z-h}{\nu} = q$$

ஆகும். ஆகவே AP, வளைவு $(118\cdot4)$ ஐ வெட்டும் புள்ளியை

$$(f + g\lambda,\ g + q\mu,\ h + q\nu)$$

என்று கொள்ளலாம். இதே புள்ளியை, $(118\cdot4)$-ல் $\alpha = \alpha_1$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறுவதாகவும் கொள்வோம். அப்படியாயின்

$$\frac{f}{1+a\alpha_1} = f + q\lambda, \quad \frac{g}{1+b\alpha_1} = g + q\mu, \quad h + c\alpha_1 = h + q\nu.$$

இவற்றிலிருந்து கிடைப்பதாவது :

$$f = (1 + a\alpha_1)(f + q\lambda),$$
$$g = (1 + b\alpha_1)(g + b\mu),$$
$$c\alpha_1 = q\nu.$$

அதாவது,

$$\lambda(q) + a\lambda(\alpha_1 q) + af(\alpha_1) = 0$$
$$\mu(q) + b\mu(\alpha_1 q) + bq(\alpha_1) = 0$$
$$\nu(q) + 0(\alpha_1 q) - c(\alpha_1) = 0.$$

ஆகவே,

$$\begin{vmatrix} \lambda & a\lambda & af \\ \mu & b\mu & bg \\ \nu & 0 & -c \end{vmatrix} = 0.$$

ஆனால், AP-ன் திசை விகிதங்களான λ, μ, ν என்பவற்றை

$$x_0 - f, \quad y_0 - g, \quad z_0 - h$$

எனக் கொள்ளலாம்.

எனவே,

$$\begin{vmatrix} x_0-f & a(x_0-f) & af \\ y_0-g & b(y_0-g) & bg \\ z_0-h & 0 & -c \end{vmatrix}=0$$

என்றும், இதிலிருந்து கூம்பின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-f & a(x-f) & af \\ y-g & \quad -g) & bg \\ z-h & 0 & -c \end{vmatrix}=0$$

என்றும் கிடைக்கிறது. இஃது ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு என்பதை எளிதிற் காணலம். ஆகவே, இக் கூம்பு ஓர் இருபடிக் கூம்பாகும். (f, g, h)-லிருந்து வரையப்பட்ட ஐந்து செங்கோடுகளும் இக் கூம்பின் பிறப்பிகள் என்பதை எளிதில் காணலாம். ஆகவே, (f, g, h)-லிருந்து வரையப்பட்ட ஐந்து செங்கோடுகள் வழியாக ஓர் இருபடிக் கூம்பு செல்லுகின்றது என்றாகிறது.

§ 119. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) என்ற புள்ளிகளிடத்துச செங்கோடுகள், (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியில் வெட்டினால் கீழ்க் காணும் விளைவுகளை நிறுவுக.

(i) $$\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)a^2 x_0=\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)b^2 y_0$$

$$=\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right)c^2 z_0$$

(ii) $$\begin{vmatrix} a^2(x_1-x_2) & b^2(y_1-y_2) & c^2(z_1-z_2) \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0.$$

செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{a^2(x-x_1)}{x} = \frac{b^2(y-y_1)}{y_1} = \frac{c^2(z-z_1)}{z_1},$$

$$\frac{a^2(x-x_2)}{x_2} = \frac{b^2(y-y_2)}{y_2} = \frac{c^2(z-z_2)}{z_2}$$

ஆகும். செங்கோடுகள் (x_0, y_0, z_0)-ல் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

எனவே, $$\frac{a^2(x_0-x_1)}{x_1} = \frac{b^2(y_0-y_1)}{y_1} = \frac{c^2(z_0-z_1)}{z_1} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{a^2(x_0-x_2)}{x_2} = \frac{b^2(y_0-y_2)}{y_2} = \frac{c^2(z_0-z_2)}{z_2} \quad \dots \quad (2)$$

ஆனல், $$\frac{a^2(x_0-x_1)}{x_1} - \frac{a^2(x_0-x_2)}{x_2}$$

$$= a^2 x_0 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right).$$

எனவே (i)-லிருந்து (ii) ஐக் கழிக்க

$$\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1}\right) a^2 x_0 = \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}\right) b^2 y_0$$

$$= \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z^2}\right) c^2 z_0.$$

என்று கிடைக்கின்றது.

அடுத்தபடியாக (1)-ல் உள்ள மூன்று உறுப்புகளையும் k_1-க்குச் சமம் என்றும், (ii)-ல் உள்ள மூன்று உறுப்புகளையும் k_2-க்குச் சமம் என்றும் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$\frac{a^2(x_0-x_1)}{x_1} = k_1$$

$$\frac{a^2(x_0-x_2)}{x_2} = k_2$$

என்று, அதாவது

$$a^2(x_0-x_1) = x_1 k_1$$

$$a^2(x_0-x_2) = x_2 k_2$$

என்று கிடைக்கின்றது. இவற்றில் ஒன்றிலிருந்து ஒன்றைக் கழிக்க

$$a^2(x_1-x_2) + x_1 k_1 - x_2 k_2 = 0$$

என்றும், இதேபோல்

$$b^2(y_1 - y_2) + y_1k_1 - y_2k_2 = 0$$

$$c^2(z_1 - z_2) + z_1k_1 - z_2k_2 = 0$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. இம் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் k_1 ஐயும், k_2 ஐயும் நீக்க

$$\begin{vmatrix} a^2(x_1 - x_2) & x_1 & x_2 \\ b^2(y_1 - y_2) & y_1 & y_2 \\ c^2(z_1 - z_2) & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a^2(x_1 - x_2) & b^2(y_1 - y_2) & c^2(z_1 - z_2) \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

என்று கிடைக்கின்றது.

கணக்கு 2. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் $P(x_1, y_1, z_1)$ இடத்துச் செங்கோடு, தளங்கள் $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ஆகியவற்றை முறையே G_1, G_2, G_3 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது என்றால்,

$$PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$$

எனக் காட்டுக.

(x_1, y_1, z_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{y_1}{b^2}\right)} = \frac{z_1 - z_2}{\left(\frac{z_1}{c^2}\right)}$$

ஆகும். இச் செங்கோடு, $x = 0$ குறிக்கும் தளத்தை G_1-ல் வெட்டுகிறது. ஆகவே, G_1 ஐ

$$\left\{ x_1 + k\left(\frac{x_1}{a^2}\right), y_1 + k\left(\frac{y_1}{b^2}\right), z_1 + k\left(\frac{z_1}{c^2}\right)\right\}$$

என்று குறித்தால், k-ன் மதிப்பை

$$x_1 + k\left(\frac{x_1}{a^2}\right) = 0$$

என்பதிலிருந்து $k = -a^2$ என்று பெறுகிறோம். எனவே, G_1 என்பது

$$\left(0,\ y_1 - \frac{a^2}{b^2},\ z_1 - \frac{a^2}{c^2} z_1\right)$$

என்றாகிறது. ஆனால், P என்பது (x_1, y_1, z_1). ஆகவே,

$$PG_1^2 = x_1^2 + \left(\frac{a^2}{b^2} y_1\right)^2 + \left(\frac{a^2}{c^2} z_1\right)^2$$

$$= x_1^2 + \frac{a^4 y_1^2}{b^4} + \frac{a^4 z_1^2}{c^4}$$

$$= a^4\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right).$$

இதுபோலவே,

$$PG_2^2 = b^4\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right),$$

$$PG_3^2 = c^4\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right)$$

என்று கிடைக்கும். ஆகவே,

$$PG_1^2 : PG_2^2 : PG_3^2 = a^4 : b^4 : c^4$$

அதாவது $PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2.$

கணக்கு 3. P என்பது சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவின்மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி. கூம்பு வளைவுருவின் P இடத்துச் செங்கோடு, சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

குறிக்கும் கோளத்தைத் தொட்டால், P-ன் இயங்குவரையைக் காண்க.

P ஐ (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின், P இடத்துச் சமன்பாடு

$$axx_0 + byy_0 + czz_0 - 1 = 0$$

ஆகும்.

ஆகவே, P இடத்துச் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$ax_0,\ by_0,\ cz_0$$

ஆகும். எனவே, இச் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}$$

ஆகும். இச் செங்கோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோளத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை

$$(x_0+ax_0k,\ y_0+by_0k,\ z_0+cz_0k)$$

என்று குறித்தால், k-ன் மதிப்புகளைச் சமன்பாடு

$$(x_0+ax_0k)^2+(y_0+by_0k)^2+(z_0+cz_0k)^2-r^2=0$$

தரும். அதாவது

$$(a^2x_0^2+b^2y_0^2+c^2z_0^2)k^2+2(ax_0^2+by_0^2+cz_0^2)k$$
$$+(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=0$$

தரும். ஆனால் செங்கோடு, கோளத்தைத் தொடுவதால் k-ன் மதிப்புகள் சமமாகும். ஆகவே,

$$(ax_0^2+by^2+cz_0^2)^2-(a^2x_0^2+b^2y_0^2-c^2z_0^2)$$
$$(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=0.$$

மேலும், $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ என்பது கூம்பு வளைவுருவின்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி. ஆகவே,

$$ax_0^2+by_0^2+cz_0^2-1=0$$

எனவே, மேலே கண்டுள்ள தொடர்பு

$$1-(a^2x_0^2+b^2y_0^2+c^2z_0^2)(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=0$$

என்று சுருங்குகிறது. இதிலிருந்து, P ஆனது, சமன்பாடு

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2-r^2)-1=0$$

குறிக்கும் இயங்குவரையின்மீதும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வளைவுருவின்மீதும் நகர்கின்றது என்றுகிறது. அதாவது P-ன் இயங்குவரையானது, கூம்பு வளைவுரு (1) ஐ இயங்குவரை (2) வெட்டும் வளைவாகும்.

கணக்கு 4. $l,\ m,\ n$ என்ற எண்களின் எம் மதிப்புகளுக்கும், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad \dots (1)$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் இரண்டு செங்கோடுகள் சமன்பாடு

$$lx + my + n = 0$$

குறிக்கும் தளத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

புள்ளி (x_1, y_1, z_1)—இடத்துச் செங்கோடு, $lx + my + n = 0$ குறிக்கும் தளத்தில் அமைவதாகக் கொள்வோம். அப்படியாயின் (x_1, y_1, z_1), இத் தளத்தின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். எனவே,

$$lx_1 + my_1 + nz_1 = 0. \qquad \ldots \qquad (2)$$

மேலும், (x_1, y_1, z_1)—இடத்துச் செங்கோடு, தளத்தில் அமைவதால், இச் செங்கோடு தளத்தின் செங்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். ஆனால், நீள்வளைவுருவின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$\frac{x_1}{a^2}, \quad \frac{y_1}{b^2}, \quad \frac{z_1}{c^2},$$

தளத்தின் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$l, m, n.$$

எனவே, $$\left(\frac{x_1}{a^2}\right) l + \left(\frac{y_1}{b^2}\right) m + \left(\frac{z_1}{c^2}\right) n = 0. \qquad \ldots \qquad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2)-லிருந்தும், (3)-லிருந்தும் கிடைப்பதாவது:

$$\frac{x_1}{\begin{vmatrix} m & n \\ \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2} \end{vmatrix}} = \frac{-y_1}{\begin{vmatrix} l & n \\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{z_1}{c^2} \end{vmatrix}} = \frac{z_1}{\begin{vmatrix} l & m \\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} \end{vmatrix}}$$

அதாவது,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k\left(\frac{mz_1}{c^2} - \frac{ny_1}{b^2}\right) \\ y_1 &= k\left(\frac{nx_1}{a^2} - \frac{lz_1}{c^2}\right) \\ z_1 &= k\left(\frac{ly_1}{b^2} - \frac{mx_1}{a^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \qquad (4)$$

ஆனால் (x_1, y_1, z_1), சமன்பாடு (1)ஐத் திருப்தி செய்யும். இதிலிருந்து k-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் உண்டு என்று காணலாம்.

ஆகவே (4)-லிருந்து இரண்டு புள்ளிகளை அடைகிறோம். அதாவது இப் புள்ளிகளிடத்துச் செங் கோடுகள் $lx+my+nz=0$ குறிக்கும் தளத்தில் அமைகின்றன.

§ 120. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) P என்பது சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. P இடத்துச் செங்கோடு, கூற்றுத் தளங்களை G_1, G_2, G_3 என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. $PG_1^2+PG_2^2+PG_3^2=k^2$ என்றால், P-ன் இயங்கு வரையானது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள நீள் வளைவுருவை, சமன்பாடு

$$(a^4+b^4+c^4)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-k^2=0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுரு வெட்டும் வளைவாகும் எனக் காட்டுக.

(2) P என்பது சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2-1=0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவின்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. P இடத்துச் செங் கோடு, தளம் $z=0$ ஐ, Q-ல் வெட்டுகிறது. PQ-ன்மீது R என்ற புள்ளியை, $QP=PR$ என்றிருக்குமாறு எடுத்துக் கொண்டால், R-ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு,

$$\frac{ac^2x^2}{(a+c)^2}+\frac{bc^2y^2}{(b+c)^2}+\frac{cz^2}{4}-1=0$$

எனக் காட்டுக.

(3) P என்பது சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. P இடத்துச் செங் கோடு, நீள்வளைவுருவை மறுபடி A என்ற புள்ளியிலும், xOy தளத்தை Q-விலும் வெட்டுகின்றது. $PA=4PQ$ என்றால், P-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

$$\frac{(2c^2-a^2)x^2}{a^6}+\frac{(2c^2-b^2)y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^4}=0$$

எனக் காட்டுக.

(4) சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் செங்கோடுகளில், சமன்பாடு $by - cz = \frac{1}{2}(b^2 - c^2)$ குறிக்கும் தளத்தில் அமையும் செங்கோடுகளின் அடிகளைக் காண்க.

(5) P என்பது சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவை, சமன்பாடு $lx + my + nz - p = 0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கூம்பு வளைவின்மேல் நகரும் ஒரு புள்ளி. கூம்பு வளைவுருவின் P இடத்துச் செங்கோட்டுக்கு இணையாக இருக்குமாறும், ஆதி வழிச் செல்லுமாறும் வரையப்படும் நேர்கோடு பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$p^2\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) - \left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b} + \frac{nz}{c}\right)^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : P ஐ (x_1, y_1, z_1) எனக்கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1 = 0, \; lx_1 + my_1 + nz_1 - p = 0$$

P இடத்துச் செங்கோட்டின் திசை விகிதங்கள் ax_1, by_1, cz_1 ஆகும். ஆதி வழியாகச் செல்லுமாறும், இச் செங்கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளவாறும் உள்ள கோட்டின்மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி (x_0, y_0, z_0) என்றால், இக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் x_0, y_0, z_0, ஆகும். ஆகவே,

$$ax_1 = kx_0, \; by_1 = ky_0, \; cz_1 = kz_0.]$$

(6) P என்பது சமன்பாடு $ax^2 + bx^2 + cz^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவுருவை, சமன்பாடு $x + y + z = 0$ குறிக்கும் தளம் வெட்டும் கூம்பு வளைவின்மீது நகரும் ஒரு புள்ளி. P இடத்துச் செங்கோடு, தளம் $z = 0$ ஐ Q-ல் வெட்டினால், Q-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : P ஐ (x_1, y_1, z_1) எனவும், Q ஐ (x_0, y_0, z_0) எனவும் கொண்டால்,

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1 = 0, \; x_1 + y_1 + z_1 = 0,$$

$$x_0 = \frac{x_1(c-a)}{c}, \; y_0 = \frac{y_1(c-b)}{c}, \; z_0 = 0.]$$

(7) k-ன் எம் மதிப்புக்கும், புள்ளி (f, g, h)-லிருந்து, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}+\frac{z^2}{c^2+k}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவுக்கு வரையப்படும் ஆறு செங்கோடுகளும், தளம் $z=0$ ஐ வெட்டும் புள்ளிகள், சமன்பாடு

$$(a^2-b^2)\,xy+(b^2-c^2)\,yz+(c^2-a^2)\,zx=0,\ z=0$$

குறிக்கும் கூம்பு வளைவின்மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு: ஆறு செங்கோடுகளின் வழிச் செல்லும் இருபடிக் கூம்பானது, k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் ஒன்றேதான் எனக் காட்டுக.]

விடைகள்

(4) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

(6) $\frac{a\,c^2\,x^2}{(c-a)^2}+\frac{b\,c^2\,y^2}{(c-b)^2}+c\left[\frac{cx}{c-a}+\frac{cy}{c-b}\right]^2=1,\ z=0.$

§ 121. துணையிய விட்டங்களும், துணையிய விட்டத் தளங்களும் (Conjugate diameters and Conjugate diametral planes).

இங்குக் குறிப்பாகச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவை எடுத்துக் கொண்டு, இதன் ஒரு கண இணையான நாண்களின் மையப்புள்ளிகளின் இயங்குவரையின் சமன்பாட்டை முதலில் காண்போம். இந் நாண்கள் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu} \qquad \ldots \quad (121{\cdot}1)$$

குறிக்கும் விட்டத்திற்கு இணையானவை எனக் கொள்வோம். இந் நாண்கள் ஒன்றின் மையப் புள்ளியை (x_0, y_0, z_0) எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் இந் நாணின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}$$

ஆகும்.

இந் நாணின் மேலுள்ள புள்ளிகளை

$$(x_0 + k\lambda,\ y_0 + k\mu,\ z_0 + k\nu)$$

என்று துணையலகு முறையில் குறிக்கலாம். இப் புள்ளிகளில், நாண் நீள்வளைவுருவை வெட்டும் புள்ளிகளைத் தரும் k-ன் மதிப்புகளை

$$\frac{(x_0 + k\lambda)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + k\mu)^2}{b^2} + \frac{(z + k\nu)^2}{c^2} - 1 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் அடைகிறோம்.

அதாவது

$$\left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right)k^2 + 2\left(\frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2} + \frac{\nu z_0}{c^2}\right)k + S_0 = 0$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலம் அடைகிறோம். ஆனால், நாணின் மையப்புள்ளி (x_0, y_0, z_0) ஆகையால், இதன் மூலங்கள் அளவில் சமமாயும், குறியில் எதிரானதாயும் இருக்கும். ஆகவே, அவற்றின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும். எனவே,

$$\frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2} + \frac{\nu z_0}{c^2} = 0.$$

இதிலிருந்து (x_0, y_0, z_0)-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2} = 0 \qquad \dots \quad (121\cdot2)$$

என்றாகிறது.

இவ் வியங்கு வரை, நீள்வளைவுருவின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளமாகும். இத் தளத்திற்கு விட்டத் தளம் என்று பெயர். மேலும், விட்டத் தளம் (121·2), விட்டம் (121·1)-ன் திசைக்குத் துணையியது (conjugate) என்று சொல்லப்படுகிறது.

அடுத்தபடியாக $P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியை நீள்வளைவுருவின்மேல் எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 59). அப்படியாயின் OP-ன் திசை விகிதங்கள் x_1, y_1, z_1 ஆகும். ஆகவே திசை OP-க்குத் துணையியதான விட்டத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 0 \qquad \dots \quad (121\cdot3)$$

ஆகும். இத் தளத்தின்மேலும், நீள்வளைவுருவின் மேலும் உள்ள ஏதாவதொரு $Q\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்

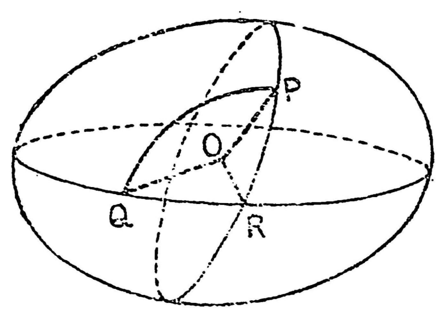
கொண்டால்,

$$\frac{x_1 x_2}{a^2}+\frac{y_1 y_2}{b^2}+\frac{z_1 z_2}{c^2}=0 \quad \ldots \quad (121 \cdot 4)$$

என்று கிடைக்கும். இப்பொழுது திசை OQ-க்குத் துணையியதான விட்டத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x_2 x}{a^2}+\frac{y_2 y}{b^2}+\frac{z_2 z}{c^2}=0 \quad \ldots \quad (121.5)$$

ஆகும், இத் தளம் $P(x_1, y_1, z_1)$ வழியாகச் செல்லுகிறது என்பதை ($121 \cdot 3$) மூலம் காணலாம்.



படம் 59.

தளங்கள் ($121 \cdot 3$), ($121 \cdot 5$) இரண்டும் வெட்டும் கோடு, நீள்வளைவுருவை வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்றை R எனக் குறிப்போம். திசை OR-க்குத் துணையியதான விட்டத்தளம், P-ன் வழியாகவும் Q-ன் வழியாகவும் செல்லுகிறது என்பதை எளிதில் அறியலாம்.

OP, OQ, OR போன்ற மூன்று விட்டங்கள், துணையிய விட்டங்கள் என்றும், POQ, QOR, ROP போன்ற தளங்கள் துணையிய விட்டத் தளங்கள் என்றும் வழங்கப்படுகின்றன.

இப்பொழுது மூன்று துணையிய அரை விட்டங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுவோம். இதற்காக

$$OP^2+OQ^2+OR^2\text{-ன்}$$

மதிப்பைக் காண்போம்.

புள்ளிகள் P, Q, R நீள்வளைவுருவின் மேல் உள்ளன.

ஆகவே,

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} &= 1. \end{aligned}\right\} \quad \dots (121\cdot6)$$

மேலும், $(121\cdot4)$-ம், இதைப்போன்ற விஞாவுகளும்

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{a}\right)\left(\frac{x_2}{a}\right) + \left(\frac{y_1}{b}\right)\left(\frac{y_2}{b}\right) + \left(\frac{z_1}{c}\right)\left(\frac{z_2}{c}\right) &= 0 \\ \left(\frac{x_2}{a}\right)\left(\frac{x_3}{a}\right) + \left(\frac{y_2}{b}\right)\left(\frac{y_3}{b}\right) + \left(\frac{z_2}{c}\right)\left(\frac{z_3}{c}\right) &= 0 \\ \left(\frac{x_3}{a}\right)\left(\frac{x_1}{a}\right) + \left(\frac{y_3}{b}\right)\left(\frac{y_1}{b}\right) + \left(\frac{z_3}{c}\right)\left(\frac{z_1}{c}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots (121\cdot7)$$

என்பவையாகும். $(121\cdot6)$-லிருந்தும், $(121\cdot7)$-லிருந்தும்

$$\frac{x_1}{a},\ \frac{y_1}{b},\ \frac{z_1}{c};\ \frac{x_2}{a},\ \frac{y_2}{b},\ \frac{z_2}{c};\ \frac{x_3}{a},\ \frac{y_3}{b},\ \frac{z_3}{c}$$

என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று திசைகளின் திசைக் கொசைன்கள் என்று அறிகிறோம். மேலும், § 12-ல் உள்ள கணக்கு 6-ன் மூலம்,

$$\frac{x_1}{a},\ \frac{x_2}{a},\ \frac{x_3}{a};\ \frac{y_1}{b},\ \frac{y_2}{b},\ \frac{y_3}{b};\ \frac{z_1}{c},\ \frac{z_2}{c},\ \frac{z_3}{c}$$

என்பவைகளும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான மூன்று திசைகளின் திசைக் கொசைன்கள் ஆகும் என்று அறிகிறோம்.

எனவே,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{z_1^2}{c^2} + \frac{z_2^2}{c_2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1;$$

$$\frac{x_1 y_1}{ab} + \frac{x_2 y_2}{ab} + \frac{x_3 y_3}{ab} = 0,$$

$$\frac{y_1 z_1}{bc} + \frac{y_2 z_2}{bc} + \frac{y_3 z_3}{bc} = 0,$$

$$\frac{z_1 x_1}{ca} + \frac{z_2 x_1}{ca} + \frac{z_3 x_3}{ca} = 0.$$

அதாவது
$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= a^2, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= b^2, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= c^2; \end{aligned}\right\} \quad \ldots (121{\cdot}8)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= 0 \\ y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 &= 0, \\ z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (121{\cdot}9)$$

விளைவுகள் (121·8)-லிருந்து

$$OP^2 + OQ^2 + OR^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z^2) + (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

என்று அறிகிறோம்.

அடுத்தபடியாக, நான்முகி $OPQR$-ன் பருமன் V ஐக் காண்போம்.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ஆனல்,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 b^2 c^2$$

எனவே,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = abc$$

ஆகவே, $V = \frac{1}{6} abc$

மேலும், OP, OQ, OR ஆகியவற்றை ஒரு முனை வழிச் செல்லும் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் பருமன் $6V = abc$ ஆகும்,

§ 122. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ என்ற புள்ளிகள், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின், ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகளானல், தளம் PQR-ன் சமன்பாடு

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)x}{a^2}+\frac{(y_1+y_2+y_3)y}{b^2}+\frac{(z_1+z_2+z_3)z}{c^2}=1$$

எனக் காட்டுக.

தளம் PQR-ன் சமன்பாட்டை $lx+my+nz=p$ எனக்கொள்வோம். இத் தளம், P, Q, R ஆகியவற்றின் வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$lx_1+my_1+nz_1=p,$$
$$lx_2+my_2+nz_2=p,$$
$$lx_3+my_3+nz_3=p.$$

இவற்றில் முதல் தொடர்பை x_1 ஆலும், இரண்டாவது தொடர்பை x_2 ஆலும், மூன்றுவது தொடர்பை x_3 ஆலும் பெருக்கிக் கிடைக்கும் மூன்று தொடர்களையும் கூட்ட

$$l(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+m(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+n(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)=p(x_1+x_2+x_3) \quad \ldots \quad (1)$$

என்று கிடைக்கின்றது. ஆனல்

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2,$$
$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0,$$
$$x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3=0.$$

என்று (121·8)-ன் மூலமும், (121·9)-ன் மூலமும் அறிகிருேம். ஆகவே, (1) ஆனது

$$l(a^2)=p(x_1+x_2+x_3)$$

அதாவது $$l=\frac{p(x_1+x_2+x_2}{a^2}$$

என்று மாறுகிறது. இதுபோலவே,

$$m=\frac{p(y_1+y_2+y_3)}{b^2},\quad n=\frac{p(z_1+z_2+z_3)}{c^2}$$

என்று பெறலாம். ஆகவே, தளம் PQR-ன் சமன்பாடு

$$\frac{p(x_1+x_2+x_3)}{a^2}x+\frac{p(y_1+y_2+y_3)}{b^2}y+\frac{p(z_1+z_2+z_3)}{c^2}z=p$$

அதாவது

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{a^2}x+\frac{y_1+y_2+y_3}{b^2}y+\frac{z_1+z_2+z_3}{c^2}z=1$$

என்ருகிறது.

கணக்கு 2. $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ என்ற புள்ளிகள், சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad \ldots (1)$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின், ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகளானால், தளம் PQR ஆனது, முக்கோணம் PQR-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியிடத்து, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3} \qquad \ldots (2)$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தொடும் தளம் எனக் காட்டுக.

முதலில் PQR-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தி நீள்வளைவுரு (2)-ன் மேல் அமைகிறதா என்பதைப் பார்ப்போம்.

இம் மையக் கோட்டுச் சந்தி G,

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ஆகும். இதன் கூறுகளை (2)-ல் உள்ள இடப் பக்கத்துக் கோவையில் x, y, z ஆகியவற்றிற்குப் பதிலாகப் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{9a^2}+\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{9b^2}+\frac{(z_1+z_2+z_3)^2}{9c^2}$$

$$=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{9a^2}+\frac{y_1^2+y_2^2+y_3^2}{9b^2}+\frac{z_1^2+z_2^2+z_3^2}{9c^2}$$

$$+\frac{2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{9a^2}+\frac{2(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)}{9b^2}$$

$$+\frac{2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)}{9c^2}$$

$$=\frac{1}{9}\left[\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)+\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}\right)\right]+\frac{2}{9}\left[\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}+\frac{z_2z_3}{c^2}\right)+\left(\frac{x_3x_1}{a^2}+\frac{y_3y_1}{b^2}+\frac{z_3z_1}{c^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{9}\Big[(1)+(1)+(1)\Big]+\frac{2}{9}\Big[(0)+(0)+(0)\Big]$$

$$=\frac{1}{3}.$$

இங்கு, கடைசியில் காணப்படும் சுருக்கம், (121·6), (121·7) என்ற விளைவுகளின்மூலம் ஏற்படுகிறது. ஆகவே, G, நீள் வளைவுரு (2)-ன் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

அடுத்தபடியாக நீள் வளைவுரு (2)-ன், G இடத்துத் தொடு தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இச் சமன்பாடு,

$$\frac{x(x_1+x_2+x_3)}{a^2\cdot 3}+\frac{y(y_1+y_2+y_3)}{b^2\cdot 3}+\frac{z(z_1+z_2+z_3)}{c^2\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

அதாவது,

$$\frac{x(x_1+x_2+x_3)}{a^2}+\frac{y(y_1+y_2+y_3)}{b^2}+\frac{z(z_1+z_2+z_3)}{c^2}-1=0$$

என்பதாகும். இச் சமன்பாடு, PQR-ன் சமன்பாடு என்பதை முந்திய கணக்கில் காணலாம்.

கணக்கு 3. $P(x_1, y_1, z_1)$ $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ என்ற புள்ளிகள், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள், l, m, n என்பவற்றைத் திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்ட ஒரு கோட்டின்மீதுள்ள OP, OQ, OR ஆகியவற்றின் வீழல்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$a^2 l^2+b^2 m^2+c^2 n^2$$

எனக் காட்டுக.

OP-ன் வீழல்

$$l(x_1-0)+m(y_1-0)+n(z_1-0)$$

ஆகும். ஆகவே, வீழல்களின் வர்க்கங்கள்

$$(lx_1+my_1+nz_1)^2,\ (lx_2+my_2+nz_2)^2,\ (lx_3+my_3+nz_3)^2$$

ஆகும். எனவே, இவற்றின் கூட்டுத் தொகை

$$\begin{aligned} &l^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+m^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\\ &\quad+n^2(z_1^2+z_2^2+z_3^2)+2\,lm(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)\\ &\quad+2\,mn(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)\\ &\quad+2\,nl(z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3)\end{aligned}$$

ஆகும். இது, (121·8), (121·9) என்ற விளைவுகளால்,

$$l^2(a^2)+m^2(b^2)+n^2(c^2)+2lm(0)+2mn(0)+2nl(0)$$

அதாவது $a^2 l^2+b^2 m^2+c^2 n^2$ என்று சுருங்குகிறது.

கணக்கு 4. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கண துணையிய விட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை. அவற்றின் அரையச்சு நீளத்தை

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

எனக் காட்டுக.

விட்டங்களின் முனைகளை $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது $OP = OQ = OR$.

எனவே,

$$OP^2 = OQ^2 = OR^2 = d^2$$

என்று கொள்வோம். அப்படியாயின்

$$OP^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = d^2$$

$$OQ^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2 = d^2$$

$$OR^2 = x_3{}^2 + y_3{}^2 + z_3{}^2 = d^2.$$

இவை மூன்றையும் கூட்ட

$$(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)+(z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2)=3d^2$$

என்றும், இதை (121·8) ஐப் பயன்படுத்திச் சுருக்க

$$a^2+b^2+c^2=3d^2$$

என்றும் கிடைக்கின்றது. எனவே,

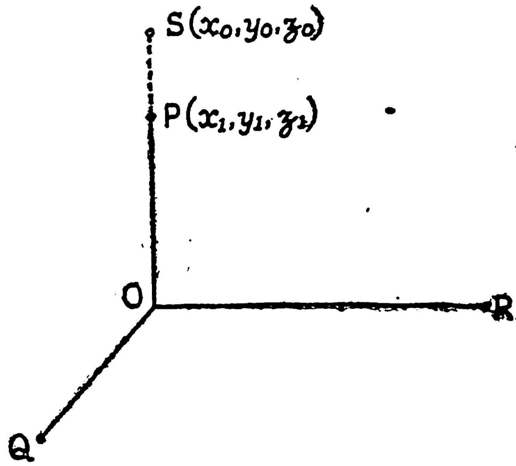
$$d=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{1}}\ .$$

கணக்கு 5. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் சம நீளங்களையுடைய துணையிய விட்டங்கள் பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க (படம் 60).

OP, OQ, OR என்பன, ஒரு கணச் சம நீளமுடைய அரைத் துணையிய விட்டங்கள். P ஐ (x_1, y_1, z_1) எனவும், OP-ன்



படம் 60.

மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியை $S(x_0, y_0, z_0)$ எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$OP^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

என்றும்,

$$x_1 = kx_0, \quad y_1 = ky_0, \quad z_1 = kz_0 \qquad \ldots \quad (1)$$

என்றும் இருக்கும். இங்கு k ஒரு மாறிலி அல்ல. ஆனால்,

$$OP^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

ஆகவே $$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \qquad \ldots \quad (2)$$

மேலும் P, நீள்வளைவுருவின்மேல் உள்ளது. எனவே,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \qquad \ldots \quad (3)$$

இப்பொழுது தொடர்பு (2)-லிருந்தும், (3)-லிருந்தும் (1)-ன் உதவியால் x_1, y_1, z_1 ஆகியவற்றை நீக்குவோம். இம் முறையில்

$$k^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$k^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)=1$$

என்று கிடைக்கும். இவற்றில் ஒன்றை மற்றதால் வகுக்க k நீங்குகிறது. இதனால்

$$\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

என்றும், அதாவது

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)-3(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=0$$

என்றும், இதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பின் சமன்பாடு

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-3(x^2+y^2+z^2)=0$$

என்றும் கிடைக்கின்றது.

§123. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) என்ற புள்ளிகள், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள் என்றால், புள்ளிகள்

$$(x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3),\ (z_1, z_2, z_3)$$

வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x_1}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}+\frac{z_1}{c^2}\right)x+\left(\frac{x_2}{a^2}+\frac{y_2}{b^2}+\frac{z_2}{c^2}\right)y+\left(\frac{x_3}{a^2}+\frac{y_3}{b^2}+\frac{z_3}{c^2}\right)z=1$$

எனக் காட்டுக.

(2) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) என்ற புள்ளிகள், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள் என்றால், புள்ளிகள்

$$(x_1, x_2, x_3),\quad (y_1, y_2, y_3),\quad (z_1, z_2, z_3)$$

வழியாகச் செல்லும் தளம், ஆதியிலிருந்து

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

தூரத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

(3) P, Q, R என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள் என்றால்,

(i) முக்கோணங்கள் OQR, ORP, OPQ ஆகியவற்றின் பரப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{4}$$

என்றும்,

(ii) OP, OQ, OR ஆகியவற்றை, ஒரு முனை வழியாகச் செல்லும் பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் முகங்களின் பரப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$4\,(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

என்றும் காட்டுக.

(4) OP, OQ, OR என்பன சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் ஒரு கண அரைத் துணையிய விட்டங்கள். திசைக் கொசைன்கள் l, m, n கொண்ட ஒரு கோட்டின் மீதுள்ள OP, OQ, OR ஆகியவற்றின் வீழல்களின் (இயற்கணித) நீளங்கள் p_1, q_1, r_1, திசைக் கொசைன்கள் l_2, m_2, n_2

கொண்ட கோட்டின்மீதுள்ள OP, OQ, OR ஆகியவற்றின் (இயற்கணித) நீளங்கள் p_2, q_2, r_2. அப்படியாயின்,

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = l_1 l_2 a^2 + m_1 m_2 b^2 + n_1 n_2 c^2$$

எனக் காட்டுக.

(5) OP, OQ, OR என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கண அரைத் துணையிய விட்டங்கள். l, m, n என்பவற்றைத் திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்ட, செங்கோட்டையுடைய ஒரு தளத்தின் மேலுள்ள OP, OQ, OR ஆகியவற்றின் வீழல்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$(1 - l^2) a^2 + (1 - m^2) b^2 + (1 - n^2) c^2$$

எனக் காட்டுக.

(6) சமன்பாடு $\lambda x + \mu y + \nu z = q$ குறிக்கும் தளம் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனை வழியாகச் செல்லுகிறது என்றால்,

$$a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 + c^2 \nu^2 - 3q^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : முனைகளை (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) எனக் கொள்க. அப்படியாயின்

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 = q, \quad \lambda x_2 + \mu y_2 + \nu z_2 = q,$$
$$\lambda x_3 + \mu y_3 + \nu z_3 = q.$$

இவற்றை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டுக.]

(7) சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்கள், சமன்பாடுகள்

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$$

குறிக்கும் கூம்பின் பிறப்பிகளானால்,

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : துணையிய விட்டங்களின் முனைகளை

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

எனக் கொள்க.

இப் புள்ளிகளின் கூறுகள் கூம்பின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும்.]

(8) P, Q, R என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு மாறுகின்ற துணையிய விட்டங்களின் முனைகள். முக்கோணம் PQR-ன் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{1}{3} = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : P, Q, R ஆகியவற்றை (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) எனவும், மையக் கோட்டுச் சந்தியை (x_0, y_0, z_0) எனவும் கொண்டால்

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

இங்கு $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$-ன் மதிப்பு $\frac{1}{3}$ ஆகும்.]

(9) P, Q, R என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள். முக்கோணம் PQR, நீள்வளைவுருவை வெட்டும் நீள்வளைவின் மையத்துடன் இணையும் எனக் காட்டுக.

(10) P, Q, R என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு மாறுகின்ற கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள். தளம் PQR, நீள்வளைவுருவை வெட்டும் நீள்வளைவின் மையத்தின் இயங்கு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(11) P, Q, R என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு மாறுகின்ற கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள். ஆதியிலிருந்து தளம் PQR-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) = 0$$

எனக் காட்டுக.

(12) ஒரு நகரும் புள்ளி Aஐ உச்சியாகக் கொண்டு, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவைத் தழுவும் கூம்பு, நீள்வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களுக்கு இணையான மூன்று பிறப்பிகளைக் கொண்டிருந்தால், A-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{3}{2} = 0$$

எனக் காட்டுக.

(13) P, Q, R என்பன. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் ஒரு மாறுகின்ற கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள். தளம் PQR-ன், நீள்வளைவுருவைப் பொருத்த, இசைப் புள்ளியின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 3 = 0$$

எனக் காட்டுக.

(14) OP, OQ, OR என்பன, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுருவின் சமநீளமுள்ள அரைத் துணையிய விட்டங்கள் என்றால்,

$$\cos^2 POQ + \cos^2 QOR + \cos^2 ROP$$
$$= \frac{3\{(a^2-b^2)^2+(b^2+c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}}{2(a^2+b^2+c^2)^2}$$

எனக் காட்டுக.

(15) $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ என்பன, சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் ஒரு கணத் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள், O, P, Q, R ஆகியவற்றின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz=0$$

என்றால்,

$$2u = -\frac{x_1OP^2+x_2OQ^2+x_3OR^2}{a^2}$$

$$2v = -\frac{y_1OP^2+y_2OQ^2+y_3OR^2}{b^2}$$

$$2w = -\frac{z_1OP^2+z_2OQ^2+z_3OR^2}{c^2}$$

எனக் காட்டுக.

(16) OP, OQ, OR என்பன சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் நீள் வளைவுருவின் மாறுகின்ற ஒரு கணச் சம நீளமுள்ள அரைத் துணையிய விட்டங்கள். O, P, Q, R வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் மையத்தின் இயங்குவரையின் சமன்பாடு

$$12(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=(a^2+b^2+c^2)^2$$

எனக் காட்டுக.

விடைகள்

(10) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{1}{3}=0.$$

9. பிறப்பிகள்

§ 124. ஒரு தகடு அதிபரவளைவுரு

இங்குச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad \ldots \quad (124 \cdot 1)$$

குறிக்கும் ஒரு தகடு அதிபரவளைவுரு ஒரு வரைபரப்பு எனக் காட்டுவோம். இதற்காக அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதுவோம் :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

அதாவது

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

இதிலிருந்து, λ தொடர்ந்து மாறும்பொழுது, சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (124 \cdot 2)$$

குறிக்கும் நேர்கோடு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவுருவைப் பிறப்பிக்கின்றது என்பதை எளிதில் காணலாம். இதேபோல். μ தொடர்ந்து மாறும்பொழுது, சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (124 \cdot 3)$$

குறிக்கும் நேர் கோடும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளை வுருவைப் பிறப்பிக்கிறது என்பதை அறியலாம். மேலும் λ, μ ஆகியவற்றின் எம் மதிப்புகளுக்கும் சமன்பாடுகள் (124·2)-ம், சமன்பாடுகள் (124·3)-ம் ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிக்கமாட்டா. அதாவது λ தொடர்ந்து மாறும் போது, சமன்பாடுகள் (124·2) ஆனது ஒரு நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தையும், μ தொடர்ந்து மாறும்போது, சமன்பாடுகள் (124·3) ஆனது வேறொரு நேர் கோட்டுக் குடும்பத்தையும் குறிக்கும். இவற்றில் முதற் குடும் பத்தைச் சேர்ந்த கோடுகள் λ-பிறப்பிகள் என்றும், இரண்டாவது குடும்பத்தைச் சேர்ந்த கோடுகள் μ-பிறப்பிகள் என்றும் வழங்கப் படுகின்றன.

இப்பொழுது, அதிபர வளைவுருவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் வழியாக ஒரு λ-பிறப்பிதான் செல்லும் என்றும், இதுபோல அப் புள்ளியின் வழியாக ஒரு μ-பிறப்பிதான் செல்லும் என்றும் காட்டுவோம்.

இதற்காக (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியை அதிபரவளைவுருவின் மீது எடுத்துக் கொள்வோம். இப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் λ-பிறப்பிகளின், λ-ன் மதிப்புகளை

$$\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y_1}{b}\right),$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y_1}{b}\right)$$

என்ற தொடர்புகளின் மூலம்,

$$\lambda = \frac{\dfrac{x_1}{a} - \dfrac{z_1}{c}}{1 - \dfrac{y_1}{b}} \text{ அல்லது } \frac{1 + \dfrac{y_1}{b}}{\dfrac{x_1}{a} + \dfrac{z_1}{c}}$$

என்று அடைகிறோம். இங்கு λ-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிடைப்பது போல் தோன்றுகிறது. ஆனால், புள்ளி (x_1, y_1, z_1) அதிபரவளைவுருவின் மேல் உள்ளதால், கீழ்க் கண்டவை கிடைக் கின்றன :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c_2} - 1 = 0$$

அதாவது $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2}$$

அதாவது

$$\left(\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{z}\right)\left(\frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}\right)=\left(1-\frac{y_1}{b}\right)\left(1+\frac{y_1}{b}\right)$$

அதாவது
$$\frac{\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}}{1-\frac{y_1}{b}}=\frac{1+\frac{y_1}{b}}{\frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}}.$$

இதிலிருந்து λ-க்கு ஒரு மதிப்புத்தான் உண்டு எனத் தெரிகிறது, ஆகவே (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லும் λ-பிறப்பி ஒன்றுதான் உண்டு என்ருகிறது இதனுல் இரண்டு λ-பிறப்பிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டா என்று கிடைக்கின்றது. ஏனென்ருல், அவ்விதம் வெட்டுவதாகக் கொண்டால். அவ் வெட்டுப் புள்ளி வழியாக, இரண்டு λ பிறப்பி செல்லுகின்றன என்ற மெய்யற்ற விளைவு கிடைக்கும்.

இதுபோலவே (x_1, y_1, z_1) வழியாக ஒரே ஒரு μ-பிறப்பிதான் செல்லும் எனக் காட்டலாம். ஆகவே, அதிபரவளைவுருவின் மேலுள்ள எப் புள்ளி வழியாகவும், ஒரு λ-பிறப்பியும், ஒரு μ-பிறப்பியும்தான் செல்லும் என்று கிடைக்கின்றது.

அடுத்தபடியாக ஒரு λ-பிறப்பி எல்லா μ-பிறப்பிகளையும் வெட்டும் என்றும், ஒரு μ-பிறப்பி எல்லா λ-பிறப்பிகளையும் வெட்டும் என்றும் காட்டுவோம். குறிப்பாக $\lambda=\lambda_1$ தரும் λ-பிறப்பி எல்லா μ-பிறப்பிகளையும் வெட்டும் எனக் காட்டுவோம். இங்கு λ-பிறப்பியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda_1\left(1-\frac{y}{a}\right), \quad \cdots \quad (124\cdot4)$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda_1}\left(1+\frac{y}{b}\right) \quad \cdots \quad \cdots \quad (124\cdot5)$$

என்பன. μ-பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad \cdots \quad \cdots \quad (124\cdot6)$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad \cdots \quad \cdots \quad (124\cdot7)$$

என்பன. இச் சமன்பாடுகளில் முதல் மூன்று சமன்பாடுகளை, x, y, z ஆகியவற்றிற்கு விடுவித்துக் கிடைக்கும் மதிப்புகள் நான்காவது சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுவோம். சமன்பாடுகள் (124·4), (124·6) இரண்டிலிருந்தும் x ஐயும், z ஐயும் நீக்கக் கிடைப்பதாவது,

$$\lambda_1\left(1-\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

அதாவது,

$$-y\left(\frac{\lambda_1}{b}+\frac{\mu}{b}\right)=-(\lambda_1-\mu) \quad \ldots (124\cdot8)$$

அதாவது,

$$\frac{y}{b}=\frac{\lambda_1-\mu}{\lambda_1+\mu}.$$

இம் மதிப்பை (124·4)-லும், (124·5)-லும் பிரதியிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda_1\left[1-\frac{\lambda_1-\mu}{\lambda_1+\mu}\right],$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda_1}\left[1+\frac{\lambda_1-\mu}{\lambda_1+\mu}\right]$$

அதாவது,

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{2\lambda_1\mu}{\lambda_1+\mu},$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{2}{\lambda_1+\mu}.$$

இந்தக் கடைசி இரண்டு சமன்பாடுகளைக் கூட்டவும், ஒன்றிலிருந்து ஒன்றைக் கழிக்கவும்

$$\frac{x}{a}=\frac{1+\lambda_1\mu}{\lambda_1+\mu},\quad \frac{z}{c}=\frac{1-\lambda_1\mu}{\lambda_1+\mu} \quad \ldots (124\cdot9)$$

என்று கிடைக்கின்றது. (124·8), (124·9) ஆகிய இரண்டிலும் கண்டுள்ள x, y, z ஆகியவற்றின் மதிப்புகள், சமன்பாடு (124·7) ஐத் திருப்தி செய்கின்றன என்பதைக் காணலாம். ஆகவே, $\lambda=\lambda_1$ தரும் பிறப்பி எல்லா μ-பிறப்பிகளையும் வெட்டுகின்றது. இவ் வெட்டும் புள்ளிகளை

$$\left(\frac{1+\lambda_1\mu}{\lambda_1+\mu}a,\ \frac{\lambda_1-\mu}{\lambda_1+\mu}b,\ \frac{1-\lambda_1\mu}{\lambda_1+\mu}c\right)$$

என்று குறிக்கலாம். அதாவது பொதுவாக ஒரு λ-பிறப்பியும், μ-பிறப்பியும் வெட்டும் புள்ளியை

$$\left(\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,a,\ \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\,b,\ \frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,c\right) \qquad \ldots \quad (124\cdot10)$$

என்று குறிக்கலாம். இப் புள்ளி அதிபரவளைவுருவின் மேலுள்ளதால்,

$$x = \frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,a,\ y = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\,b,\ z = \frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}\,c$$

என்ற சமன்பாடுகள் அதிபரவளைவுருவின் துணையலகுச் சமன்பாடுகளாகும். இங்கு λ, μ என்பன துணையலகுகள்.

ஒரு λ-பிறப்பியும், ஒரு μ-பிறப்பியும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன என்பதை, λ-பிறப்பியும், μ-பிறப்பியும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன என்று காட்டியும் நிறுவலாம். சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} - \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) + k\left[\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right)\right] = 0$$

குறிக்கும் தளம், λ-பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளமாகும் என்பதையும், சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} - \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) + k'\left[\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right] = 0$$

குறிக்கும் தளம், μ-பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளமாகும் என்பதையும் நாம் அறிவோம். இச் சமன்பாடுகளில் $k = \lambda\mu$ என்றால், முதற்சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு மாறுகிறது :

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} - \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \lambda\mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) - \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0$$

அதாவது

$$\frac{x}{a}(1+\lambda\mu)+\frac{y}{b}(\lambda-\mu) - \frac{z}{c}(1-\lambda\mu)-(\lambda+\mu)=0$$

அதாவது

$$\frac{x}{a}\,\frac{(1+\lambda\mu)}{(\lambda+\mu)}+\frac{y}{b}\,\frac{(\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)}-\frac{z}{c}\,\frac{(1+\lambda\mu)}{(\lambda+\mu)}-1=0.$$

இதேபோல் $k'=\lambda\mu$ என்ருல், இரண்டாவது சமன்பாடும்

$$\frac{x}{a}\left(\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)+\frac{y}{b}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\right)-\frac{z}{c}\left(\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)-1=0 \quad \ldots \quad (124{\cdot}11)$$

என்று மாறுகிறது எனக் காட்டலாம். அதாவது சமன்பாடு (124·11) குறிக்கும் தளம் λ-பிறப்பியின் வழியாகவும், μ-பிறப்பியின் வழியாகவும் செல்லுகிறது எனக் கிடைக்கின்றது. எனவே, இப் பிறப்பிகள் இரண்டும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றது என்றும், ஆகவே, இப் பிறப்பிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன என்றும் கிடைக்கின்றது. மேலும், இப் பிறப்பிகள் அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு, (124·11) என்றும் கிடைக்கின்றது. மேலும், இத் தளம் அதிபர வளைவுருவின் (124·10) குறிக்கும் புள்ளியிடத்துத் தொடுதளம் என்பதைத் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கொண்டு அறியலாம். அதாவது இத் தளம், அதிபரவளைவுருவைக் (124·10) குறிக்கும் புள்ளியில் தொட்டுக் கொண்டு, அதிபர வளைவுருவை λ-பிறப்பியிலும், μ-பிறப்பியிலும் வெட்டுகின்றது.

அடுத்தபடியாக, ஒரு பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளம், அதிபரவளைவுருவை அப் பிறப்பியின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியில் தொடும் எனக் காட்டுவோம், இதற்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்திற்கு π என்றும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள பிறப்பிக்கு l_1 என்றும் பெயரிடுவோம். ஒரு தளம் பொதுவாக அதிபரவளைவுருவை l-ல் வெட்டுகிறது. ஆகவே, அதிபர வளைவுருவை இன்னொரு கோட்டிலும் வெட்டும். இக் கோட்டுக்கு l_2 எனப் பெயரிடுவோம். இப்பொழுது l_1, l_2 இரண்டும் அதிபர வளைவுருவின் இரண்டு பிறப்பிகளாகும். அவற்றில் ஒன்று λ-பிறப்பியாகவும், மற்றது μ-பிறப்பியாகவும் இருக்கும். மேலும் π, இப் பிறப்பிகள் வெட்டும் புள்ளியில் அதிபரவளைவுருவைத் தொடும் என்பது நாம் அறிந்ததே.

கடைசியாகச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

குறிக்கும் கோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவுருவின் ஒரு பிறப்பியாவதற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்போம். இக்கோட்டின் மேலுள்ள எப்புள்ளியையும்

$$(x_1+lk,\ y_1+mk,\ z_1+nk)$$

என்று குறிப்பிடலாம். இப் புள்ளியானது, k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அதிபரவளைவுருவின்மேல் அமையும். அதாவது அதிபரவளைவுருவின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். அதாவது k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\frac{(x_1+lk)^2}{a^2}+\frac{(y_1+mk)^2}{b^2}+\frac{(z_1+nk)^2}{c^2}-1=0$$

அதாவது,

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)k^2+2\left(\frac{lx_1}{a^2}+\frac{my_1}{b^2}-\frac{nz_1}{c^2}\right)k$$
$$+\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=0$$

ஆகும். எனவே, k^2-ன் குணகம், k-ன் குணகம், மாறிலி உறுப்பு மூன்றுமே பூச்சியங்களாகும். ஆகவே, வேண்டிய நிபந்தனை

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{lx_1}{a^2}+\frac{my_1}{b^2}-\frac{nz_1}{c^2}=0,$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}-1=0$$

என்பவைகளாகும்.

§ 125. அதிபரவளைவுப் பரவளைவுரு

இந்தச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2z}{c}=0 \qquad \cdots (125\cdot 1)$$

குறிக்கும் ஒரு பரவளைவுரு ஒரு வரைபரப்பு எனக் காட்டுவோம். இதற்காக அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் சமன்பாட்டைக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதுவோம் :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}\,.$$

அதாவது $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\left(\frac{z}{c}\right)$.

இதிலிருந்து, λ தொடர்ந்து மாறும் பொழுது சமன்பாடுகள்,

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=\lambda\frac{z}{c}\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\frac{2}{\lambda}\end{aligned}\right\}\qquad\ldots\quad(125\cdot2)$$

குறிக்கும் நேர்கோடு. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவைப் பிறப்பிக்கின்றது என்பதை எளிதில் காணலாம். இதேபோல், μ தொடர்ந்து மாறும்பொழுது, சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}&=2\mu\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{z}{c}\right)\end{aligned}\right\}\qquad\ldots\quad(125\cdot3)$$

குறிக்கும் நேர்கோடும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவைப் பிறப்பிக்கின்றது என்பதை அறியலாம். மேலும் λ, μ ஆகியவற்றின் எம் மதிப்புகளுக்கும் சமன்பாடுகள் (125·2)-ம், சமன்பாடுகள் (125·3)-ம் ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிக்க மாட்டா. அதாவது λ தொடர்ந்து மாறும்போது, சமன்பாடுகள் (125·2) ஆனது ஒரு நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தையும், μ தொடர்ந்து மாறும்பொழுது, சமன்பாடுகள் (125·3) ஆனது வேறொரு நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தையும் குறிக்கும். இவற்றில் முதற் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த கோடுகள் λ-பிறப்பிகள் என்றும், இரண்டாவது குடும்பத்தைச் சேர்ந்த கோடுகள் μ-பிறப்பிகள் என்றும் வழங்கப்படுகின்றன.

இப்பொழுது அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியின் வழியாக ஒரு λ-பிறப்பிதான், செல்லும் என்றும், இது போல அப் புள்ளியின் வழியாக ஒரு μ-பிறப்பிதான் செல்லும் என்றும் காட்டுவோம்.

இதற்காக (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியை அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின்மீது எடுத்துக்கொள்வோம். இப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் λ-பிறப்பிகளின் λ-ன் மதிப்புகளை

$$\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} = \lambda \frac{z_1}{c}$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = \frac{2}{\lambda}$$

என்ற தொடர்புகளின் மூலம்,

$$\lambda = \frac{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}}{\frac{z_1}{c}} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{2}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}$$

என்று அடைகிறோம். இங்கு λ-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் கிடைப்பது போல் தோன்றுகிறது. ஆனால், (x_1, y_1, z_1) அதிபர வளைவுப் பரவளைவுருவின் மேலுள்ளதால், கீழ்க்கண்டவை கிடைக்கின்றன:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{2z_1}{c} = 0$$

அதாவது $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{2z_1}{c}$$

அதாவது $$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right) = \frac{2z_1}{c}$$

அதாவது $$\frac{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}}{\frac{z_1}{c}} = \frac{2}{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}.$$

இதிலிருந்து λ-க்கு ஒரு மதிப்புத்தான் உண்டு எனத் தெரிகிறது. ஆகவே, (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லும் λ-பிறப்பி ஒன்றுதான் உண்டு என்றாகிறது. இதனால் இரண்டு λ-பிறப்பிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டா என்று கிடைக்கின்றது. ஏனென்றால் அவ்விதம் வெட்டுவதாகக் கொண்டால், அவ் வெட்டுப் புள்ளி வழியாக, இரண்டு λ-பிறப்பிகள் செல்லுகின்றன என்ற மெய்யற்ற விளைவு கிடைக்கும்.

இது போலவே (x_1, y_1, z_1) வழியாக ஒரே ஒரு μ பிறப்பி தான் செல்லும் எனக் காட்டலாம். ஆகவே, அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் மேலுள்ள எப்புள்ளி வழியாகவும் ஒரு λ-பிறப்பி யும், ஒரு μ பிறப்பியும்தான் செல்லும் என்று கிடைக்கின்றது.

அடுத்தபடியாக ஒரு λ-பிறப்பி எல்லா μ-பிறப்பிகளையும் வெட்டும் என்றும், ஒரு μ-பிறப்பி எல்லா λ-பிறப்பிகளையும் வெட்டும் என்றும் காட்டுவோம்.

குறிப்பாக $\lambda = \lambda_1$ தரும் λ-பிறப்பி, எல்லா μ-பிறப்பிகளையும் வெட்டும் எனக் காட்டுவோம். இங்கு $\lambda = \lambda_1$ தரும் பிறப்பியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda_1 \left(\frac{z}{c}\right) \quad \dots (125\cdot4)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2}{\lambda_1} \quad \dots (125\cdot5)$$

என்பன. μ-பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\mu \quad \dots (125\cdot6)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{z}{c}\right) \quad \dots (125\cdot7)$$

என்பன. இச் சமன்பாடுகளில் முதல் மூன்று சமன்பாடுகளை x, y, z ஆகியவற்றிற்கு விடுவித்துக் கிடைக்கும் மதிப்புகள் நான்காவது சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுவோம்.

சமன்பாடுகள் (125·5), (125·6) இரண்டிலிருந்து x ஐயும், y ஐயும் கணக்கிட,

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{1}{\lambda_1} + \mu \\ \frac{y}{b} &= \frac{1}{\lambda_1} - \mu \end{aligned}\right\} \quad \dots (125\cdot8)$$

என்று கிடைக்கின்றது. இம் மதிப்புகளை (125·4)-ல் பிரதியிட,

$$\frac{1}{\lambda_1} + \mu - \frac{1}{\lambda_1} + \mu = \lambda_1 \frac{z}{c}$$

அதாவது $$2\mu = \lambda_1 \frac{z}{c}$$

அதாவது $$\frac{z}{c} = \frac{2\mu}{\lambda_1} \quad \dots (125\cdot9)$$

என்று கிடைக்கிறது. (125·8), (125·9) ஆகிய இரண்டிலும் கண்டுள்ள (x, y, z) ஆகியவற்றின் மதிப்புகள், சமன்பாடு (125·7) ஐத் திருப்தி செய்கின்றன என்பதைக் காணலாம். ஆகவே $\lambda = \lambda_1$ தரும் பிறப்பி, எல்லா μ-பிறப்பிகளையும் வெட்டுகின்றது.

இவ் வெட்டுப் புள்ளிகளை,

$$\left[\frac{1+\lambda_1\mu}{\lambda_1}a,\quad \frac{1-\lambda_1\mu}{\lambda_1}b,\quad \frac{2\mu}{\lambda_1}c\right]$$

என்று குறிக்கலாம். அதாவது பொதுவாக ஒரு λ-பிறப்பியும், μ-பிறப்பியும் வெட்டும் புள்ளியை

$$\left[\frac{1+\lambda\mu}{\lambda}a,\quad \frac{1-\lambda\mu}{\lambda}b,\quad \frac{2\mu}{\lambda}c\right] \quad \dots \quad (125\cdot10)$$

என்று குறிக்கலாம். இப் புள்ளி அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் மேலுள்ளதால்

$$x = \frac{1+\lambda\mu}{\lambda}a,\quad y = \frac{1-\lambda\mu}{\lambda}b,\quad z = \frac{2\mu}{\lambda}c$$

என்ற சமன்பாடுகள் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் துணையலகுச் சமன்பாடுகளாகும். இங்கு λ, μ என்பன துணையலகுகள்.

இப்பொழுது ஒரு λ-பிறப்பியும், ஒரு μ-பிறப்பியும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன என்பதை λ-பிறப்பியும் μ-பிறப்பியும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன என்று காட்டியும் திறுவலாம். சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \lambda\frac{z}{c} + k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{2}{\lambda}\right) = 0$$

குறிக்கும் தளம், λ-பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளமாகும் என்பதையும், சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - 2\mu + k'\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{z}{c}\right)\right] = 0$$

குறிக்கும் தளம், μ-பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளமாகும் என்பதையும் நாம் அறிவோம். இச் சமன்பாடுகளில் $k = \lambda\mu$ என்றால், முதற் சமன்பாடு கீழ்க் கண்டவாறு மாறுகிறது:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \lambda\frac{z}{c} + \lambda\mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{2}{\lambda}\right) = 0$$

அதாவது,

$$\frac{x}{a}(1+\lambda\mu) + \frac{y}{b}(\lambda\mu - 1) - \lambda\frac{z}{c} - 2\mu = 0$$

அதாவது,

$$\frac{x}{a}\left(\frac{1+\lambda\mu}{2\mu}\right) + \frac{y}{b}\left(\frac{\lambda\mu-1}{2\mu}\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{z}{c} - 1 = 0$$

இதேபோல் $k' = \lambda\mu$ என்றல், இரண்டாவது சமன்பாடும்

$$\frac{x}{a}\left(\frac{1+\lambda\mu}{2\mu}\right)+\frac{y}{b}\left(\frac{\lambda\mu-1}{2\mu}\right)-\frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{z}{c}\right)-1=0 \quad ... (125\cdot11)$$

என்று மாறுகிறது எனக் காட்டலாம். அதாவது, சமன்பாடு (125·11) குறிக்கும் தளம் λ-பிறப்பியின் வழியாகவும், μ-பிறப்பியின் வழியாகவும் செல்லுகின்றது எனக் கிடைக்கின்றது. எனவே, இப் பிறப்பிகள் இரண்டும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றது என்றும், ஆகவே, இப் பிறப்பிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டு கின்றன என்றும் கிடைக்கின்றது. மேலும், இப் பிறப்பிகள் அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு, (125·11) என்றும் கிடைக் கின்றது. மேலும். இத் தளம் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் (125·10) குறிக்கும் புள்ளியிடத்துத் தொடுதளம் என்பதைத் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டு அறியலாம். அதாவது இத் தளம், அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை (125·10) குறிக்கும் புள்ளியில் தொட்டுக் கொண்டு அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை λ-பிறப்பியிலும், μ பிறப்பியிலும் வெட்டுகின்றது.

அடுத்தபடியாக, ஒரு பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளம், அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை, அப் பிறப்பியின் மேலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியில் தொடும் எனக் காட்டுவோம். இதற்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தளத்திற்கு π என்றும், கொடுக் கப்பட்டுள்ள பிறப்பிக்கு l_1 என்றும் பெயரிடுவோம். ஒரு தளம் பொதுவாக அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை ஒரு கூம்பு வளைவில் வெட்டும். ஆனல், இங்கு π அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை l_1-ல் வெட்டுகிறது. ஆகவே, அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை இன்னெரு கோட்டிலும் வெட்டும். இக் கோட்டுக்கு l_2 எனப் பெயரிடுவோம். இப்பொழுது l_1, l_2 இரண்டும் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் இரண்டு பிறப்பிகளாகும். அவற்றில் ஒன்று λ-பிறப்பியாகவும், மற்றது μ-பிறப்பியாகவும் இருக்கும். மேலும் π, இப் பிறப்பிகள் வெட்டும் புள்ளியில் அதிபரவளைவுப் பரவளை வுருவைத் தொடும் என்பது நாம் அறிந்ததே.

கடைசியாகச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

குறிக்கும் கோடு கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவுப் பரவளை வுருவின் ஒரு பிறப்பியாவதற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்போம். இக் கோட்டின் மேலுள்ள எப் புள்ளியையும்

$$(x_1+lk,\ y_1+mk,\ z_1+nk)$$

என்று குறிப்பிடலாம். இப் புள்ளியானது, k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின்மேல் அமையும். அதாவது, அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும். அதாவது k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\frac{(x_1+lk)^2}{a^2} - \frac{(y_1+mk)^2}{b^2} - \frac{2(z_1+nk)}{c} = 0$$

அதாவது $$\left(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)k^2 + 2\left(\frac{lx_1}{a^2} - \frac{my_1}{b^2} - \frac{n}{c}\right)k + \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{2z_1}{c}\right) = 0$$

ஆகும். எனவே k^2-ன் குணகம், k-ன் குணகம், மாறிலி உறுப்பு மூன்றும் பூச்சியங்களாகும். ஆகவே, வேண்டிய நிபந்தனை

$$\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{lx_1}{a^2} - \frac{my_1}{b^2} - \frac{n}{c} = 0.$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{2z_1}{c} = 0$$

என்பவையாகும்.

§ 126. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் ஒரு குடும்பத்தின் பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{c}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

என்றும், அடுத்த பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{-c}, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

என்றும் எழுதலாம் எனக் காட்டுக.

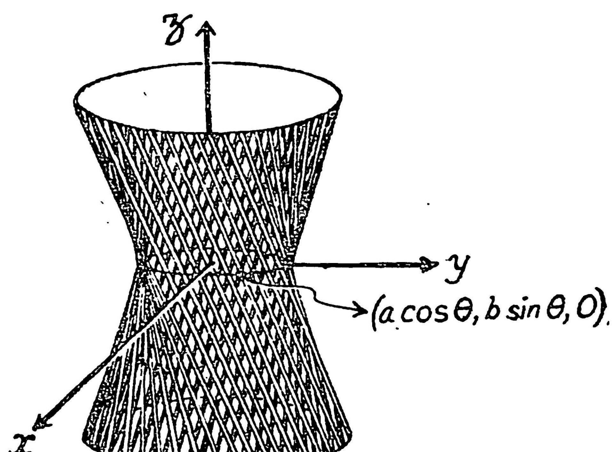
அதிபரவளைவுருவை தளம் $z = 0$ ஆனது, சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad z = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவில் வெட்டும். எனவே, பிறப்பிகள் இந் நீள் வளைவின் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும். ஆனால், இப் புள்ளிகளை

$$(a \cos \theta, \; b \sin \theta, \; 0), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

என்று குறிக்கலாம் (படம் 61).



படம் 61.

இப்பொழுது புள்ளி $(a \cos \theta, \; b \sin \theta, \; 0)$ வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்போம். இப் பிறப்பிகளில் ஒன்றின் திசை விகிதங்களை

$$l, \; m, \; 1$$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் இப் பிறப்பியின் சமன் பாடுகள்

$$\frac{x - a \cos \theta}{l} = \frac{y - b \sin \theta}{m} = \frac{z - 0}{1}$$

ஆகும். ஆகவே, இப் பிறப்பியின் புள்ளிகள் யாவற்றையும்

$$(a \cos \theta + kl, \; b \sin \theta + km, \; 0 + k)$$

என்று துணையலகு வடிவில் எழுதலாம். ஆனால், இப்புள்ளிகளின் கூறுகள் அதிபரவளைவுருவின் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும்.

எனவே, $\frac{(a\cos\theta+kl)^2}{a^2}+\frac{(b\sin\theta+km)^2}{b^2}-\frac{k^2}{c^2}-1=0.$

அதாவது $\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)k^2+2\left(\frac{l\cos\theta}{a}+\frac{m\sin\theta}{b}\right)k$

$+(\cos^2\theta+\sin^2\theta-1)=0$

அதாவது $\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)k+2\left(\frac{l\cos\theta}{a}+\frac{m\sin\theta}{b}\right)=0$

இச் சமன்பாடு k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். எனவே k-ன் குணகமும், மாறிலி உறுப்பும் பூச்சியங்களாகும்.

ஆகவே, $\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0,$ ... (1)

$\frac{l\cos\theta}{a}+\frac{m\sin\theta}{b}=0.$ ... (2)

இவற்றில் இரண்டாவது தருவது

$m=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}l$ ... (3)

என்பது. இம் மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட்டால் கிடைப்பதாவது:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{l^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta}-\frac{1}{c^2}=0$$

அதாவது $\frac{l^2}{a^2}(1+\cot^2\theta)=\frac{1}{c^2}$

அதாவது $\frac{l^2}{a^2}\operatorname{cosec}^2\theta=\frac{1}{c^2}$

அதாவது $l^2=\frac{a^2}{c^2}\sin^2\theta$

அதாவது $l=\frac{a\sin\theta}{c},\ -\frac{a\sin\theta}{c}.$

இந்த l-ன் இரண்டு மதிப்புகளைச் சார்ந்த m-ன் மதிப்புகளை (3)-ன் மூலம்

$$-\frac{b\cos\theta}{c},\quad\frac{b\cos\theta}{c}$$

என்று அறிகிறோம். ஆகவே, $(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)$ வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகளின் திசை விகிதங்கள்

$$\frac{a\sin\theta}{c},\ -\frac{b\cos\theta}{c},\ 1;\quad -\frac{a\sin\theta}{c},\ \frac{b\cos\theta}{c},\ 1.$$

அதாவது $a \sin\theta, -b\cos\theta, c$; $a\sin\theta, -b\cos\theta, -c$ என்பனவாகும். எனவே, இப் பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{c},$$

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta} = \frac{z}{-c}$$

ஆகும்.

கணக்கு 2. சமன்பாடுகள்

$$l_1x + m_1y + n_1z - p_1 = 0, \quad l_2x + m_2y + n_2z - p_2 = 0$$

குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் ஒரு பிறப்பி என்றால்,

$$al_1^2 + bm_1^2 + cn_1^2 - p_1^2 = 0,$$
$$al_2^2 + bm_2^2 + cn_2^2 - p_2^2 = 0,$$
$$al_1l_2 + bm_1m_2 + cn_1n_2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் ஒன்றின் சமன்பாட்டை

$$(l_1x + m_1y + n_1z - p_1) + k(l_2x + m_2y + n_2z - p_2) = 0$$

என்று எழுதலாம். அதாவது

$$(l_1 + kl_2)\,x + (m_1+km_2)\,y + (n_1+kn_2)\,z - (p_1 + kp_2) = 0 \quad \ldots(1)$$

என்று எழுதலாம். ஆனால், ஒரு பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளம் அதிபரவளைவுருவை ஒரு புள்ளியில் தொடும் என அறிவோம். ஆகவே, சமன்பாடு (1) குறிக்கும் தளம், k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அதிபரவளைவுருவின் தொடுதளமாகிறது. தொடுதளமாவதால் (105·2)-ன் மூலம்

$$a(l_1 + kl_2)^2 + b(m_1+km_2)^2 + c(n_1+kn_2)^2 - (p_1+kp_2)^2 = 0$$

ஆகும். அதாவது,

$$(al_2^2 + bm_2^2 + cn_2^2 - p_2^2)\,k^2 + 2\,(al_1\,l_2 + bm_1\,m_2 + cn_1\,n_2 - p_1\,p_2)\,k + (al_1^2 + bm_1^2 + cn_1^2 - p_1^2) = 0$$

ஆகும். ஆனால், இச் சமன்பாடு k-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகிறது. ஆகவே k^2-ன் குணகம், k-ன் குணகம், மாறிலி உறுப்பு ஆகியவை பூச்சியங்களாகும்.

எனவே, $al_1^2 + bm_1^2 + cn_1^2 - p_1^2 = 0,$

$$al_2^2 + bm_2^2 + cn_2^2 - p_2^2 = 0,$$

$$al_1 l_2 + bm_1 m_2 + cn_1 n_2 - p_1 p_2 = 0.$$

கணக்கு 3. ஆதியிலிருந்து, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுவின் பிறப்பிகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்கோடுகள், சமன்பாடு

$$\frac{a^2 (b^2 + c^2)^2}{x^2} + \frac{b^2 (c^2 + a^2)^2}{b^2} - \frac{c^2 (a^2 - b^2)^2}{z^2} = 0$$

குறிக்கும் கூம்பின்மேல் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவுருவைத் தளம் $z = 0$ ஆனது, சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \ z = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளைவில் வெட்டும். எனவே, பிறப்பிகளில் ஒவ்வொன்றும் இந் நீள்வளைவின் ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும்

$$(a \cos \theta, \ b \sin \theta, 0)$$

என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x - a\cos\theta}{a \sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{- b\cos\theta} = \frac{z - 0}{\pm c}$$

ஆகும் என § 126-ல் கணக்கு 1-ல் கண்டோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள வினாவில் c^2 தான் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, இனிமேல் $(\pm c)$-க்குப் பதிலாக $+c$ ஐயே எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஆதியிலிருந்து இப் பிறப்பிகளில் ஒன்றுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் மேல் (x_0, y_0, z_0) என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம். அப்படியாயின், இக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள்

$$x_0, y_0, z_0$$

ஆகும். ஆனால்,

$$a \sin\theta, \ - b\cos\theta, \ c$$

என்பன பிறப்பியின் திசை விகிதங்கள். எனவே,

$$x_0 (a \sin\theta) + y_0 (- b\cos\theta) + z_0 c = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

இப்பொழுது செங்கோடு (0, 0, 0) வழியாகச் செல்லுகிறது. மேலும், பிறப்பியும், இச் செங்கோடும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன. ஆகவே,

$$\begin{vmatrix} a\cos\theta-0 & b\sin\theta-0 & 0-0 \\ a\sin\theta & -b\cos\theta & c \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}=0$$

அதாவது,

$$a\cos\theta(-bz_0\cos\theta-cy_0)-b\sin\theta(az_0\sin\theta-cx_0)=0$$

அதாவது $-abz_0(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-acy_0\cos\theta+bcx_0\sin\theta=0$

அதாவது $bcx_0\sin\theta-acy_0\cos\theta-abz_0=0$ ... (2)

இப்பொழுது (1) ஐயும், (2) ஐயும் விடுவித்து $\sin\theta$, $\cos\theta$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டு θ ஐ நீக்குவோம். இங்கு

$$\frac{\sin\theta}{\begin{vmatrix} -by_0 & cz_0 \\ -acy_0 & -abz_0 \end{vmatrix}}=\frac{-\cos\theta}{\begin{vmatrix} ax_0 & cz_0 \\ bcx_0 & -abz_0 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} ax_0 & -by_0 \\ bcx_0 & -acy_0 \end{vmatrix}}$$

அதாவது

$$\frac{\sin\theta}{ay_0z_0\begin{vmatrix} -b & c \\ -c & -b \end{vmatrix}}=\frac{-\cos\theta}{bz_0x_0\begin{vmatrix} a & c \\ c & -a \end{vmatrix}}=\frac{1}{cx_0y_0\begin{vmatrix} a & -b \\ b & -a \end{vmatrix}}$$

அதாவது $\dfrac{\sin\theta}{a(b^2+c^2)y_0z_0}=\dfrac{\cos\theta}{b(c^2+a^2)z_0x_0}=\dfrac{-1}{c(a^2-b^2)x_0y_0}$

அதாவது $\sin\theta=-\dfrac{a(b^2+c^2)z_0}{c(a^2-b^2)x_0}$, $\cos\theta=-\dfrac{b(c^2+a^2)z_0}{c(a^2+b^2)y_0}$

இவற்றை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டக் கிடைப்பதாவது,

$$\frac{a^2(b^2+c^2)^2z_0^2}{c^2(a^2-b^2)^2x_0^2}+\frac{b^2(c^2+a^2)^2z_0^2}{c^2(a^2-b^2)^2y_0^2}=1$$

அதாவது $\dfrac{a^2(b^2+c^2)^2z_0^2}{x_0^2}+\dfrac{b^2(c^2+a^2)^2z_0^2}{y_0^2}-c^2(a^2-b^2)^2=0$

அதாவது $\dfrac{a^2(b^2+c^2)^2}{x_0^2}+\dfrac{b^2(c^2+a^2)^2}{y_0^2}-\dfrac{c^2(a^2-b^2)^2}{z_0^2}=0.$

இதிலிருந்து வேண்டிய கூம்பின் சமன்பாடு

$$\frac{a^2(b^2+c^2)^2}{x^2}+\frac{b^2(c^2+a^2)^2}{y^2}-\frac{c^2(a^2+b^2)^2}{z^2}=0$$

என்றாகிறது.

கணக்கு 4. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவைத் தலையாய தளம் $z=0$ வெட்டும் வளைவு ஓர் நீள்வளைவு என்று காட்டுக. அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளின், தளம் $z=0$ மேலுள்ள வீழல்கள், இந் நீள்வளைவு களின் தொடுகோடுகளாகும் எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவுருவைத் தளம் $z=0$ வெட்டும் வளைவின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad z=0. \qquad \ldots (1)$$

ஆகவே, இவ் வளைவு ஒரு நீள்வளைவாகும். இப்பொழுது ஒரு λ-பிறப்பியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

என அறிவோம். இப் பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டை

$$\left\{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)\right\}+k\left\{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{b}\right)\right\}=0$$

என்று எழுதலாம். இதன் திசை விகிதங்கள்

$$\frac{1}{a}+\frac{k}{a},\quad \frac{\lambda}{b}-\frac{k}{\lambda b},\quad -\frac{1}{c}+\frac{k}{c}$$

ஆகும். தளம் $z=0$-ன் திசை விகிதங்கள்

$$0,\ 0,\ 1$$

ஆகும்.

ஆகவே, λ-பிறப்பியின் வழியாகச் செல்லும், z தளம் $z = 0$-க்குச் செங்குத்தானால்,

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{k}{a}\right)(0) + \left(\frac{\lambda}{b} - \frac{k}{\lambda b}\right)(0) + \left(\frac{-1}{c} + \frac{k}{c}\right)1 = 0$$

அதாவது, $k = 1$.

ஆகவே, இத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} - \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) + \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0$$

அதாவது.

$$\frac{2x}{a} + \left(\frac{\lambda}{b} - \frac{1}{\lambda b}\right)y + \left(-\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = 0$$

அதாவது,

$$\frac{2x}{a} + \frac{\lambda^2 - 1}{b\lambda}\, y - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} = 0$$

அதாவது,

$$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}\,\frac{x}{a} + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\,\frac{y}{b} - 1 = 0$$

ஆகவே, λ-பிறப்பியின் $z = 0$-ன்மேல் வீழலின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}\,\frac{x}{a} + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\,\frac{y}{b} - 1 = 0,\ z = 0 \quad \dots \quad (2)$$

ஆகும். ஆனால், இருபரிமாண வரைகணிதத்தின்படி, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் நீள் வளையின் மேல் புள்ளி

$$\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}\, a,\ \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\, b\right)$$

அமைந்துள்ளது என்பதை

$$\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}\right)^2 - 1 = 0$$

என்பதன் மூலம் அறியலாம். மேலும், நீள்வளையின் இப் புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a^2}\left(\frac{2\lambda a}{\lambda^2+1}\right) + \frac{y}{b^2}\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\, b\right) - 1 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

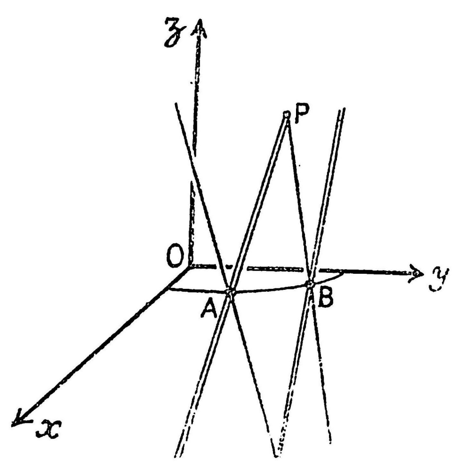
அதாவது $$\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\frac{x}{a}+\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\frac{y}{b}-1=0$$

என்பதையும் அறிவோம். இதிலிருந்து சமன்பாடுகள் (2) குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு (3) குறிக்கும் நீள்வளையைத் தொடுகின்றது என்றாகிறது.

கணக்கு 5. புள்ளிகள் $A(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ 0)$, $B(a\cos\phi,\ b\sin\phi,\ 0)$ வழியாகச் செல்லும், சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க (படம் 62).



படம் 62.

வெட்டும் புள்ளிகளில் ஒன்றை $P(x_1, y_1, z_1)$ எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது தளம் PAB ஆனது, அதிபரவளைவுருவை P இடத்தில் தொடுகிறது. ஆகவே, இத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}-\frac{z\,z_1}{c^2}-1=0$$

ஆகும். ஆனால் இத் தளம், தளம் $z=0$ ஐ, AB-ல் வெட்டுகிறது. ஆகவே, AB-ன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0,\quad z=0 \qquad \dots (1)$$

ஆகும்.

ஆனால், இரு பரிமாண வரைகணிதத்தில்

$$A \equiv (a\cos\theta,\ b\sin\theta),\quad B \equiv (a\cos\phi,\ b\sin\phi)$$

என்றும், AB-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{a} + \frac{y\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{b} - \cos\frac{\theta-\phi}{2} = 0$$

என்றும் இருக்கும் என்பதை அறிவோம். ஆகவே, AB-ன் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{a} + \frac{y\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{b} - \cos\frac{\theta-\phi}{2} = 0,\ z=0 \ldots (2)$$

என்றும் எழுதலாம். இச் சமன்பாடுகளைச் சமன்பாடுகள் (1) உடன் ஒப்பிடக் கிடைப்பதாவது :

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\left(\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{a}\right)} = \frac{\frac{y_1}{b^2}}{\left(\frac{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{b}\right)} = \frac{-1}{\left(-\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right)}$$

அதாவது

$$x_1 = a\left(\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right),\quad y_1 = b\left(\frac{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right).$$

மேலும் (x_1, y_1, z_1), அதிபரவளைவுருவின் மேல் உள்ளதால்,

$$\left(\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right)^2 - \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0$$

அதாவது $$\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right)^2 - \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0$$

அதாவது $$\frac{z_1^2}{c^2} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)}1 -$$

$$\frac{z_1^2}{c^2} = \frac{\sin^2\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}}$$

$$z_1 = \pm c\frac{\sin\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}.$$

ஆகவே, A-ன் வழியாகவும், B-ன் வழியாகவும் செல்லும் பிறப்பிகளின் வெட்டுப் புள்ளிகள்

$$\left(\frac{a\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}, \frac{b\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\sin\frac{\theta-\phi}{2}}, \pm\frac{c\sin\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right)$$

ஆகும்.

§ 127. பயிற்சிக் கணக்குகள்

(1) சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

குறிக்கும் நேர்கோடு, சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் ஒரு பிறப்பியானல்,

$$al^2 + bm^2 + cn^2 = 0,$$

$$alx_1 + bmy_1 + cnz_1 = 0,$$

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1 = 0$$

எனக் காட்டுக.

(2) புள்ளி $(2, 3, -4)$ வழியாகச் செல்லும், சமன்பாடு $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

[உதவிக் குறிப்பு : ஒரு பிறப்பியின் திசை விகிதங்கள் $l : m : n$ என்ருல், இப் பிறப்பியின் மேலுள்ள புள்ளிகள் அனைத்தையும்

$$(2 + lk,\quad 3 + mk,\quad -4 + nk)$$

என்று துணையலகு வடிவில் கொள்ளலாம். இங்கு

$$\frac{l^2}{4} + \frac{m^2}{9} - \frac{n^2}{16} = 0, \quad \frac{l}{2} + \frac{m}{3} + \frac{n}{4} = 0.$$

என்று கிடைக்கும் $l : m : n$ காண்க.]

(3) சமன்பாடுகள்

$$l_1x + m_1y + n_1z - p_1 = 0,$$
$$l_2x + m_2y + n_2z - p_2 = 0$$

குறிக்கும் கோடு, சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் ஒரு பிறப்பியானுல்,

$$\frac{l_1^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2} - \frac{n_1^2}{c^2} - p_1^2 = 0,$$

$$\frac{l_2^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} - \frac{n_2^2}{c^2} - p_2^2 = 0,$$

$$\frac{l_1 l_2}{a^2} + \frac{m_1 m_2}{b^2} - \frac{n_1 n_2}{c^2} - p_1 p_2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

(4) சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் ஒரு λ-பிறப்பி, ஒரு μ-பிறப்பிக்குச் செங்குத்தானுல்,

$$a^2(1 + \lambda\mu)^2 + b^2(\lambda - \mu)^2 + c^2(1 - \lambda\mu)^2 - (a^2+b^2-c^2)(\lambda + \mu)^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : பிறப்பிகளின் திசை விகிதங்கள்

$$(\lambda^2 - 1)\,a,\ -2\lambda\, b,\ -(\lambda^2 + 1)\,c;$$
$$(\mu^2 - 1)\,a,\ 2\mu\, b,\ -(\mu^2 + 1)\,c.]$$

(5) சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் செங்குத்தான பிறப்பிகளின் வெட்டுப் புள்ளிகளின் இயங்குவரையானது, அதிபரவளைவுருவை அதன் குத்துத் தொடுதளக் கோளம் வெட்டும் வளைவாகும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : λ-பிறப்பியைச் செங்குத்தான μ-பிறப்பி வெட்டும் புள்ளி (x_0, y_0, z_0) என்றால்,

$$x_0=\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}a,\quad y_0=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}b,\quad z_0=\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}c,$$

$$a^2(1+\lambda\mu)^2+b^2(\lambda-\mu)^2+c^2(1-\lambda\mu)^2 -(a^2+b^2-c^2)(\lambda+\mu)^2=0.]$$

(6) சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் மேலுள்ள $(a, 0, 0)$ வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகளின் λ, μ மதிப்புகள் 1-க்குச் சமம் என்றும், $(-a, 0, 0)$ வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகளின் λ, μ மதிப்புகள் (-1)-க்குச் சமம் என்றும் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : λ, μ பிறப்பிகளின் வெட்டுப் புள்ளிகள்

$$\frac{a(1+\lambda\mu)}{\lambda+\mu},\ \frac{b(\lambda-\mu)}{\lambda+\mu},\ \frac{c(1-\lambda\mu)}{\lambda+\mu}.$$

(i) $\frac{a(1+\lambda\mu)}{\lambda+\mu}=a, \frac{b(\lambda-\mu)}{\lambda+\mu}=0, \frac{c(1-\lambda\mu)}{\lambda+\mu}=0.$

அதாவது $1+\lambda\mu=\lambda+\mu,\ \lambda-\mu=0,\ 1-\lambda\mu=0.]$

(7) சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் மேலுள்ள $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$ என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் λ-பிறப்பிகள், ஒரு μ-பிறப்பியை B, B' என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$AB \,.\, A'B' = b^2+c^2$ எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : $t = \dfrac{1-\mu}{1+\mu}$ என்றால், $B \equiv (a, f, t, c, t)$, $B' \equiv \left(-a, \dfrac{b}{t}, \dfrac{-c}{t}\right)$.]

(8) சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{q^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளில் புள்ளி $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ வழியாகச் செல்லும் பிறப்பி ஒன்று, புள்ளி $(a\cos\phi, b\sin\phi, 0)$ வழியாகச் செல்லும் பிறப்பி ஒன்றுக்குச் செங்குத்தானால்,

$$a^2 \sin\theta \sin\phi + b^2 \cos\theta \cos\phi - c^2 = 0$$

எனக் காட்டுக.

(9) சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளில், சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; z = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளையின் சம நீளமுள்ள இரு துணையிய விட்டங்களின் முனைகள் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் ψ.

(i) $a^2 + b^2 = 6c^2$ என்றால் $\psi = 60°$;

(ii) $a^2 + b^2 = 2c^2$ என்றால், $\psi = 90°$

என்று காட்டுக.

(10) சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளில், புள்ளிகள்

$$(a\cos\theta, b\sin\theta, 0), \; (a\cos\phi, b\sin\phi, 0)$$

வழியாகச் செல்லும் இரண்டு வெட்டும் பிறப்பிகளின், $z = 0$ குறிக்கும் தளத்தின் மேலுள்ள வீழல்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் ψ என்றால்,

$$\tan\psi = \frac{ab\sin(\theta - \phi)}{c^2}$$

எனக் காட்டுக.

(11) சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளில், சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; z = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளையின் இரண்டு நகரும் துணையிய விட்டங்களின் முனைகள் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகள் வெட்டும் புள்ளிகளின் இயங்குவரை, சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 = 0, \; z = c; \quad \frac{x^2}{a_2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 = 0, \; z = -c$$

குறிக்கும் நீள்வளைவுகளாகும் எனக் காட்டுக.

(12) P, Q என்பன சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; z = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளையின்மீது நகரும் இரண்டு புள்ளிகள். இப் புள்ளிகளின் மைய வகற்சிக் கோணங்களின் (eccentric angles) வித்தியாசம், மாறிலி 2α. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளில், P வழியாகச் செல்லும் ஒரு பிறப்பியை, Q வழியாகச் செல்லும் ஒரு பிறப்பி வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபர வளைவுருவைச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 \sin^2 \alpha} = 0$$

குறிக்கும் கூம்பு வெட்டும் வளைவுகளாகும் எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : அதிபரவளைவுருவைத் தளங்கள் $z = c \tan \alpha$, $z = -c \tan \alpha$ வெட்டும் வளைவுகளே வேண்டிய இயங்குவரை.]

(13) P, Q என்பன சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \; z = 0$$

குறிக்கும் நீள்வளையின்மீது நகரும் இரண்டு புள்ளிகள், இம் புள்ளிகளின் மைய வகற்சிக் கோணங்களின் ஒன்று மற்றதைப் போல் மூன்று மடங்காக உள்ளது. சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

குறிக்கும் அதிபரவளைவுருவின் பிறப்பிகளில், P வழியாகச் செல்லும் ஒரு பிறப்பியை, Q வழியாகச் செல்லும் ஒரு பிறப்பி வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபர வளைவுருவைச் சமன்பாடு

$$y^2(z^2+c^2)-4b^2z^2=0$$

குறிக்கும் இயங்குவரை வெட்டும் வளைவுகளாகும் எனக் காட்டுக.

(14) சமன்பாடு $x^2-y^2-az=0$ குறிக்கும் பரவளைவுருவின் மேலுள்ள P என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பிகள் இரண்டின் வழியாகச் செல்லும் இரண்டு தளங்கள் ஆதி O வழியாகச் செல்லுகின்றன என்றால், இத் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் $\tan^{-1}(2\cdot OP/a)$ எனக் காட்டுக.

(15) சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-2z=0$

குறிக்கும் பரவளைவுருவின் பிறப்பிகளுக்கு, ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் பிறப்பிக்கும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2z^2-\frac{a^2+b^2}{ab}xy=0$$

எனக் காட்டுக.

[உதவிக் குறிப்பு : λ-பிறப்பியின் சமன்பாடுகளை

$$\frac{x-\dfrac{a}{\lambda}}{a\lambda}=\frac{y-\dfrac{b}{\lambda}}{-b\lambda}=\frac{z}{2}$$

என எழுதுக.]

(16) சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-2z=0$

குறிக்கும் பரவளைவுருவின் செங்குத்துப் பிறப்பிகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் இயங்குவரையானது சமன்பாடு $2z+a^2-b^2=0$ குறிக்கும் தளமாகும் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

(2) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+4}{-4}$,

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+4}{-2}.$$

10. வெக்டர் முறையில் சில விளைவுகள்

§ 128. வெக்டர் முறை (Vector Method)

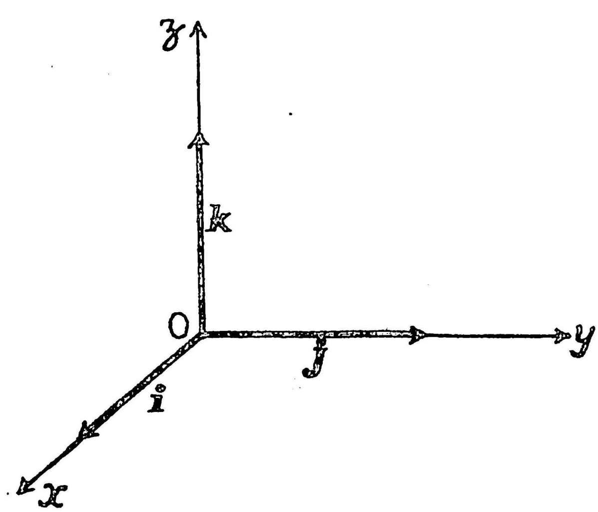
இந்த அத்தியாயத்தில் வெக்டரைப் பயன்படுத்திச் சில விளைவுகளைக் காண்போம். இங்கு

வெக்டர் கூட்டல் (Vector addition)

வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கல் (dot product of vectors)

வெக்டர்களின் குறுக்குப் பெருக்கல் (cross product of veotors)

ஆகிய வெக்டர் முறைகளை வாசகர்கள் தெரிந்திருப்பதாகக் கொள்ளப்படுகிறது.

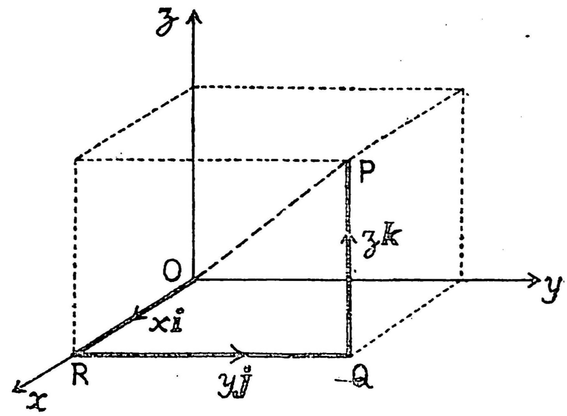


படம் 63

இந்த அத்தியாயம் முழுவதும், Ox, Oy, Oz திசைகளில் அலகு வெக்டர்களை (unit vectors) i, j, k என்று எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 63).

§ 129. ஒரு புள்ளியின் இட வெக்டர் (Position vector of a point)

இங்குப் புள்ளி $P(x, y, z)$-ன் ஆதி O ஐப் பொறுத்த இட வெக்டரைக் காண்போம். இவ் வெக்டர், $\overline{OP}$ ஆகும். P-லிருந்து PQ ஐ xOy தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், Q-லிருந்து QR ஐ x அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும் வரைந்தால் (படம் 64),



படம் 64.

$$OR = x,\ RQ = y,\ QP = z.$$

மேலும், $\overline{OR} = x\mathbf{i},\ \overline{RQ} = y\mathbf{j},\ \overline{QP} = z\mathbf{k}.$

ஆகவே, $\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{RQ} + \overline{QP}$

$$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \qquad \ldots \quad (129{\cdot}1)$$

§ 130. இரு புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம்

இப்பொழுது, $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $P_2, (x_2, y_2, z_2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்போம் (படம் 65).

இங்கு, $\overline{OP_1} = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k},$

$$\overline{OP_2} = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + z_2\,\mathbf{k}.$$

ஆகவே, $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1O} + \overline{OP_2}$

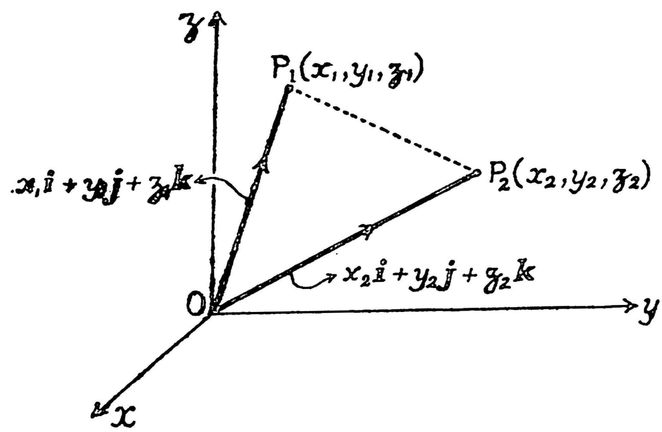
$$= -\overline{OP_1} + \overline{OP_2}$$

$$= \overline{OP_2} - \overline{OP_1}$$

$$= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 + z_1)\mathbf{k}.$$

ஆனால், $\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_2} = P_1P_2^2$ என்று அறிவோம்.



படம் 65.

எனவே,
$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= [(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}] \\ &\quad\cdot[(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}] \\ &= (x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2+(z_2-z_1)^2 \\ &= (x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2+(z_1-z_2)^2 \end{aligned}$$

ஆகவே,
$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

§ 131. ஒரு குறிப்பிட்ட திசையின் அலகு வெக்டர்

இப்பொழுது, குறிப்பாகத் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n குறிக்கும் திசையில் அலகு வெக்டரைக் காண்போம். இதற்காக இவ் அலகு வெக்டரை

$$a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$$

எனக் கொள்வோம். இவ் வெக்டரின் திசைக்கும், $\mathbf{i}$-ன் திசைக்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தை α எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் $\cos\alpha = l$. ஆகவே

$$(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})\cdot\mathbf{i} = |a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}|\cdot|\mathbf{i}|\cdot\cos\alpha$$
$$=1\cdot1\cdot l. \qquad \ldots (131\cdot1)$$

மேலும்,
$$\begin{aligned}(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})\cdot\mathbf{i} &= a\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+b\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+c\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} \\ &= a(1)+b(0)+c(0) \\ &= a. \qquad \ldots (131\cdot2)\end{aligned}$$

(131·1)-லிருந்தும், (131·2)-லிருந்தும் $a = l$ என்றும், இது போலவே $b = m$, $c = n$ என்றும் அறிகிறோம். எனவே, வேண்டிய அலகு வெக்டர்

$$l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} \qquad (131·3)$$

என்றாகிறது.

அடுத்தபடியாக, (131·3) ஐப் பயன்படுத்தி ஒரு திசையின் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 1 ஆகும் என்பதை நிறுவுவோம். $l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ ஓர் அலகு வெக்டர் ஆகையால்,

$$(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})\cdot(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = 1$$

அதாவது $\quad ll + mm + nn = 1$

ஆகவே, $\quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$

மேலும், ஒரு திசையின் திசை விகிதங்கள் λ, μ, ν என்றால், இத் திசையின் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

ஆகும் என்பதை அறிவோம். ஆகவே, இத் திசையைக் குறிக்கும் அலகு வெக்டர்

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\mathbf{i} + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\mathbf{j} + \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\mathbf{k}$$

ஆகும். எனவே, பொதுவாக, வெக்டர்

$$\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k}$$

இத் திசையைக் குறிப்பதாகவும் கொள்ளலாம்.

§132. இரு கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம்

இங்கு இரண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்போம். இக் கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள்

$$l_1, m_1, n_1;\quad l_2, m_2, n_2$$

என்றால், இக் கோடுகளின் திசைகளைக் குறிக்கும் அலகு வெக்டர்கள்

$$l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k},\quad l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j} + n_2\mathbf{k}$$

ஆகும்.

எனவே, இத் திசைகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் θ. என்றால்,

$$(l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k})\cdot(l_2\mathbf{i} + m_2\mathbf{j}\ n_2\mathbf{k}) = 1\cdot 1.\cos\theta$$

ஆகும். அதாவது

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \cos\theta.$$

ஆகவே $\theta = \cos^{-1}(l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_2)$

மேலும், கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் திசை விகிதங்கள்

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1;\quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2$$

என்றால் வெக்டர்கள்

$$\mathbf{f}_1 = \lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k},\ \mathbf{f}_2 = \lambda_2\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \nu_2\mathbf{k}$$

இரண்டும் இக் கோடுகளுக்கு இணையாகும். ஆகவே, இங்கு

$$\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 = |\mathbf{f}_1|\cdot|\mathbf{f}_2|\cdot\cos\theta$$

அதாவது $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_1|\cdot|\mathbf{f}_2|}$

$$= \frac{(\lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k})\cdot(\lambda_2\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \nu_2\mathbf{k})}{|\lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k}|\,|\lambda_2\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \nu_2\mathbf{k}|}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2}\ \sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2}}$$

ஆகவே,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2}\ \sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2}}\right).$$

§ 133. ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் மூன்று கோடுகளின் ஒரு தளத் தன்மை (Coplanarity)

ஒரு புள்ளி வழியாகச் செல்லும் மூன்று கோடுகளின் திசை விகிதங்களை

$$\lambda_1, \mu_1, \nu_1;\quad \lambda_2, \mu_2, \nu_2;\quad \lambda_3, \mu_3, \nu_3$$

எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் வெக்டர்கள்

$$\mathbf{f}_1 = \lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{f}_2 = \lambda_2\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \nu_2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{f}_3 = \lambda_3\mathbf{i} + \mu_3\mathbf{j} + \nu_3\mathbf{k},$$

இக் கோடுகளுக்கு இணையாகும். இக் கோடுகள் ஒருதளக் கோடுகளானால், இவ் வெக்டர்களும் ஒருதள வெக்டர்கள் ஆகும். அப்படியாயின் இவ் வெக்டர்களின் எண்ணிமுப் பெருக்கற் பலன் (scalar triple product) பூச்சியமாகும்.

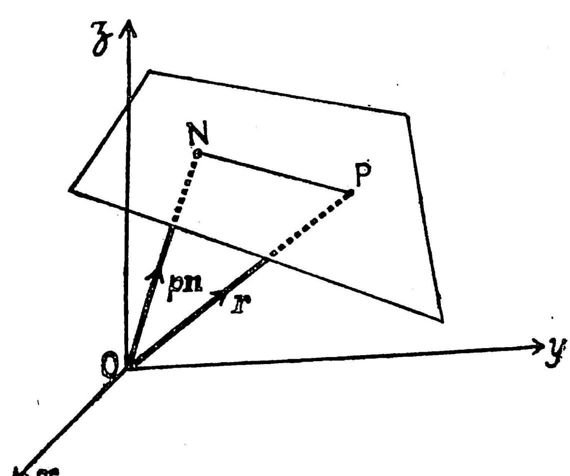
அதாவது $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = 0$

அதாவது $\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0$

இது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகளாவதற்கான நிபந்தனையாகும்.

§ 134. ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு

முதலில் ஆதியிலிருந்து p தூரத்திலுள்ள ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இதற்காக ஆதியிலிருந்து ON என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைவோம் (படம் 66).



படம் 66.

இப்பொழுது

$$ON = p$$

மேலும், வெக்டர் ON-ன் அலகு வெக்டர் $\mathbf{n}$ என்றால்,

$$\overline{ON} = |\overline{ON}|\,\mathbf{n} = p\,\mathbf{n}.$$

P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியைத் தளத்தின்மேல் எடுத்துக் கொண்டு, அதன் இட வெக்டரை $\mathbf{r}$ எனக் கொள்வோம். அப்படியாயின் NP, ON-க்குச் செங்குத்தானதாகும்.

ஆகவே, $\overline{NP}\cdot\overline{ON}=0$

அதாவது $(-\overline{ON}+\overline{OP})\cdot\overline{ON}=0$

அதாவது $-\overline{ON}\cdot\overline{ON}+\overline{OP}\cdot\overline{ON}=0$

அதாவது $\overline{OP}\cdot\overline{ON}=\overline{ON}\cdot\overline{ON}$

அதாவது $\mathbf{r}\cdot(p\mathbf{n})=p^2$

அதாவது $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p.$ ... (134·1)

இது தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும். தளத்தின் எண்ணிச் சமன்பாட்டைக் (scalar equation) காண, P ஐ (x, y, z) எனவும், ON-ன் திசைக் கொசைன்களை l, m, n எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$\mathbf{r}=\overline{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{n}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}.$$

எனவே, சமன்பாடு (134·1)

$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})=p$$

அதாவது $lx+my+nz=p$

என்றாகிறது.

அடுத்தபடியாகக் கீழ்க்காணும் தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்போம் :

(i) புள்ளி A_1 (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லுமாறும், λ_1, μ_1, ν_1 என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகவும் கொண்ட l_1 என்ற கோட்டுக்கும், λ_2, μ_2, ν_2 என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட l_2 என்ற கோட்டுக்கும் இணையானதுமான தளம்.

(ii) புள்ளிகள் $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ வழியாகச் செல்லுமாறும் λ_1, μ_1, ν_1 என்பவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட l_1 என்ற கோட்டுக்கு இணையானதுமான தளம்.

(iii) புள்ளிகள் $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ வழியாகச் செல்லும் தளம்.

இப்பொழுது A_1, A_2, A_3 ஆகியவற்றின் இடவெக்டர்களை முறையே

$$\mathbf{a}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}_2 = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + z_2\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}_3 = x_3\,\mathbf{i} + y_3\,\mathbf{j} + z_3\,\mathbf{k}$$

எனக் கொள்வோம். வெக்டர்கள்

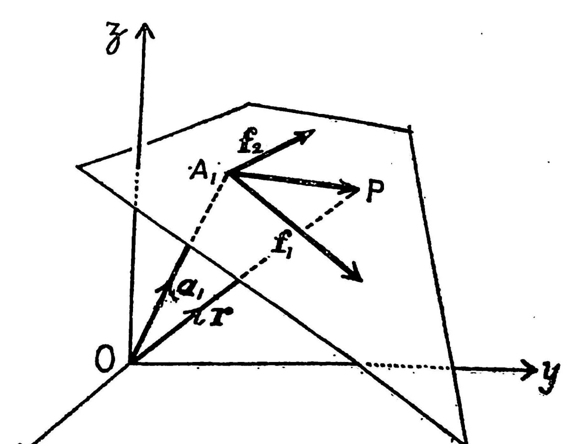
$$\mathbf{f}_1 = \lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{f}_2 = \lambda_2\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \nu_2\mathbf{k}$$

இரண்டும் முறையே l_1-க்கும், l_2-க்கும் இணையானவை. தளத்தின்மீது $P(x, y, z)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டு அதன் இட வெக்டரை

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

எனக் குறிப்போம்.

(i) இங்குத் தளம், A_1 வழியாகச் செல்லுகிறது. ஆகவே, A_1P தளத்தில் அமைந்துள்ளது. மேலும், இத் தளம் $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ இரண்டுக்கும் இணையானது (படம் 67).



படம் 67.

ஆகவே, தளம்

$$\overline{A_1P},\ \mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2$$

என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையானது.

ஆகவே, இவ் வெக்டர்களின் எண்ணி முப்பெருக்கற் பலன் பூச்சியமாகும். அதாவது

$$[\overline{A_1P}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = 0.$$

ஆனால்,

$$\overline{A_1P} = \overline{A_1O} + \overline{OP}$$
$$= \overline{OA_1} + \overline{OP}$$
$$= -\mathbf{a}_1 + \mathbf{r}$$
$$= \mathbf{r} - \mathbf{a}_1$$

எனவே, தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$[\mathbf{r} - \mathbf{a}_1, \ \mathbf{f}_1, \ \mathbf{f}_2] = 0 \qquad \ldots (134\cdot2)$$

ஆகும். இதிலிருந்து தளத்தின் எண்ணிச் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இங்கு,

$$\mathbf{r} - \mathbf{a}_1 = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$
$$= (x - x_1)\,\mathbf{i} + (y - y_1)\,\mathbf{j} + (z - z_1)\,\mathbf{k}.$$

எனவே, சமன்பாடு (134·2)-லிருந்து, தளத்தின் எண்ணிச் சமன்பாட்டை,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

என்று அடைகிறோம்.

(ii) இங்குத் தளம் A_1, A_2 வழியாகச் செல்லுகின்றது (படம் 68). ஆகவே, இத் தளம்,

$$\overline{A_1P}, \overline{A_1A_2}, \mathbf{f}$$

என்ற மூன்று வெக்டர்களுக்கும் இணையானது. ஆகவே, இவ் வெக்டர்களின் எண்ணி முப்பெருக்கற் பலன் பூச்சியமாகும்.

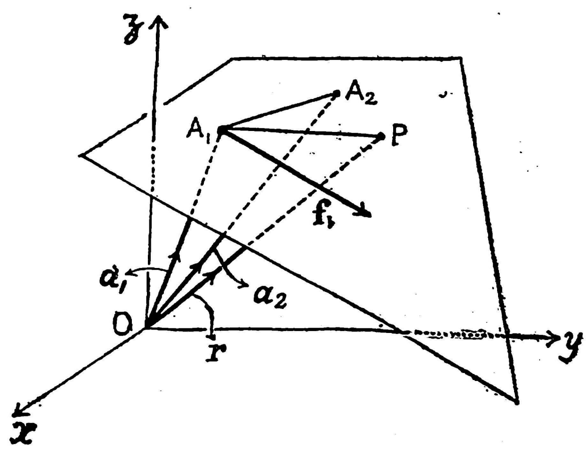
அதாவது

$$[\overline{A_1P}, \overline{A_1A_2}, \mathbf{f}_1] = 0$$

ஆனால், $\overline{A_1P} = \mathbf{r} - \mathbf{a}_1$, $\overline{A_1A_2} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$. எனவே, தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு $[\mathbf{r} - \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \mathbf{f}_1] = 0$ ஆகும்.

இதிலிருந்து தளத்தின் எண்ணிச் சமன்பாட்டைக் காண் போம். இங்கு

$$\mathbf{r}-\mathbf{a}_1 = (x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1 = (x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}.$$



படம் 68.

எனவே, தளத்தின் எண்ணிச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} = 0$$

என்பதாகும்.

(iii) இங்குத் தளம் A_1, A_2, A_3 வழியாகச் செல்லுகிறது (படம் 69). ஆகவே, இத் தளம்

$$\overline{A_1P},\ \overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3}$$

என்ற மூன்று வெக்டர்களுக்கும் இணையானது. ஆகவே, இவ் வெக்டர்களின் எண்ணி முப்பெருக்கற் பலன் பூச்சியமாகும்

அதாவது $$[\overline{A_1P},\ \overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3}] = 0$$

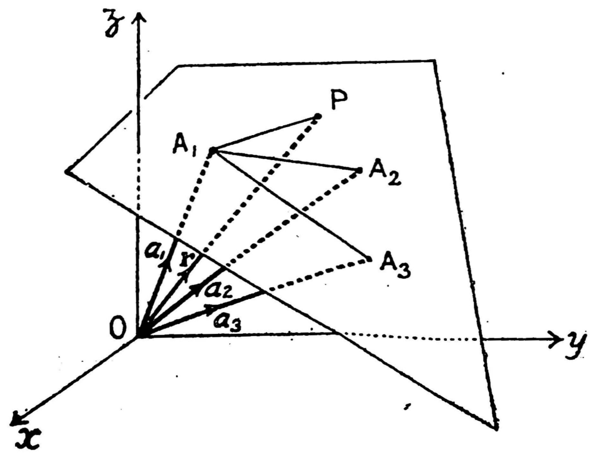
ஆனால்,

$$\overline{A_1P}=\mathbf{r}-\mathbf{a}_1,\quad \overline{A_1A_2}=\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1,\quad \overline{A_1A_3}=\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1.$$

எனவே, தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$[\mathbf{r}-\mathbf{a}_1,\ \ \mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1,\ \ \mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1]=0$$

ஆகும். இதிலிருந்து தளத்தின் எண்ணிச் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.



படம் 69.

இங்கு,
$$\mathbf{r}-\mathbf{a}_1=(x-x_1)\,\mathbf{i}+(y-y_1)\,\mathbf{j}+(z-z_1)\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1=(x_2-x_1)\,\mathbf{i}+(y_2-y_1)\,\mathbf{j}+(z_2-z_1)\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1=(x_3-x_1)\,\mathbf{j}+(y_3-y_1)\,\mathbf{j}+(z_3-z_1)\,\mathbf{k}$$

எனவே, தளத்தின் எண்ணிச் சமன்பாடு

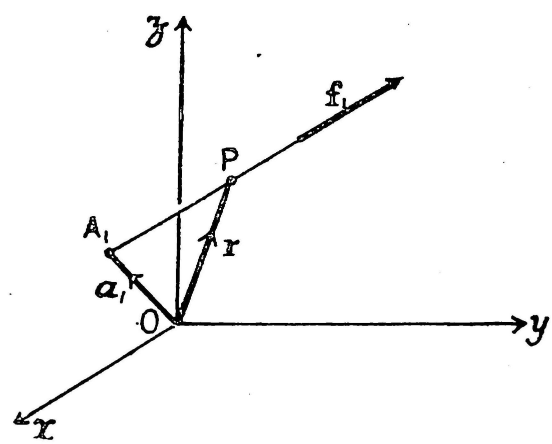
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

என்றாகிறது.

§ 135. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

முதலில் புள்ளி A_1 (x_1, y_1, z_1) வழியாகச் செல்லுமாறும், λ_1, μ_1, ν_1 ஆகியவற்றைத் திசை விகிதங்களாகக் கொண்ட ஒரு கோட்டுக்கு இணையானதுமான ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 70). புள்ளி A_1-ன் இட வெக்டரை $\mathbf{a}_1$ என்றும், கோட்டின் மீது $P(x, y, z)$ என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுத்

துக் கொண்டு, P-ன் இட வெக்டரை $\mathbf{r}$ எனவும் கொள்வோம். இப்பொழுது வெக்டர் $\overline{A_1 P}$, $\mathbf{f}_1$-க்கு இணையானது.



படம் 70.

இங்கு $\mathbf{f}_1 = \lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k}$.

எனவே, $\overline{A_1P} = t\,\mathbf{f}_1$

இங்கு t என்பது மாறுகின்ற ஓர் எண். ஆனால், $\overline{A_1P} = \mathbf{r}-\mathbf{a}_1$. எனவே, கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}_1) = t\,\mathbf{f}_1 \qquad \dots \quad (135\cdot1)$$

ஆகும். இங்கு t துணையலகாகும்.

ஆனால், $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$\mathbf{a}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

ஆகவே, $\mathbf{r} - \mathbf{a}_1 = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$

$$= (x - x_1)\,\mathbf{i} + (y - y_1)\,\mathbf{j} + (z - z_1)\,\mathbf{k}.$$

எனவே, கோட்டின் சமன்பாடு

$$(x - x_1)\,\mathbf{i} + (y - y_1)\,\mathbf{j} + (z - z_1)\,\mathbf{k} = t\,(\lambda_1\mathbf{i} + \mu_1\mathbf{j} + \nu_1\mathbf{k})$$

ஆகும். இதிலிருந்து,

$$x - x_1 = t\lambda_1, \quad y - y_1 = t\mu_1, \quad z - z_1 = t\nu_1$$

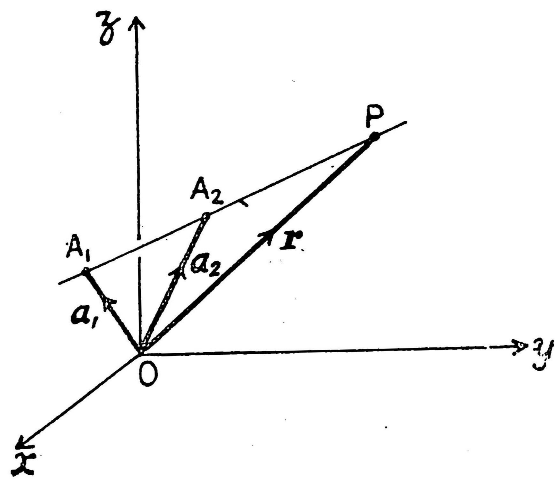
என்று பெறுகிறோம்.

அதாவது

$$\frac{x - x_1}{\lambda_1} = \frac{y - y_1}{\mu_1} = \frac{z - z_1}{\nu_1} = t$$

இச் சமன்பாடுகளே கோட்டின் எண்ணிச் சமன்பாடுகளாகும்.

அடுத்தபடியாகப் புள்ளிகள் $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்போம் (படம் 71). கோட்டின்மேல் $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியை



படம் 71.

எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது A_1, A_2, P மூன்றும் ஒரு கோட்டில் உள்ளதால், வெக்டர்கள்

$$\overline{A_1P}\ ,\ \overline{A_1A_2}$$

இரண்டும்

$$\overline{A_1P} = t\ \overline{A_1A_2}$$

என்றவாறு இருக்கும். இங்கு t ஆனது P-ன் இடத்தைப் பொறுத்து மாறுகின்றது.

ஆனால், $\overline{A_1P} = \mathbf{r} - \mathbf{a}_1$, $\overline{A_1A_2} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$

ஆகவே, கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு $\mathbf{r} - \mathbf{a}_1 = t(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)$ ஆகும். இங்கு t துணையலகாகும்.

ஆனுல் $\mathbf{r}-\mathbf{a}_1 = (x-x_1)\,\mathbf{i} + (y-y_1)\,\mathbf{j} + (z-z_1)\,\mathbf{k}.$

$$\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1 = (x_2-x_1)\,\mathbf{i} + (y_2-y_1)\,\mathbf{j} + (z_2-z_1)\,\mathbf{k}.$$

ஆகவே, கோட்டின் சமன்பாடு

$$(x-x_1)\,\mathbf{i} + (y-y_1)\,\mathbf{j} + (z-z_1)\,\mathbf{k}$$
$$= t\,[\,(x_2-x_1)\,\mathbf{i} + (y_2-y_1)\,\mathbf{j} + (z_2-z_1)\,\mathbf{k}\,]$$

ஆகும். இதிலிருந்து

$$x-x_1 = t\,(x_2-x_1),$$
$$y-y_1 = t\,(y_2-y_1),$$
$$z-z_1 = t\,(z_2-z_1)$$

என்று, அதாவது

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

என்று கிடைக்கின்றது. இவையே கோட்டின் எண்ணிச் சமன்பாடுகளாகும்.

§ 136. இரு கோடுகளின் ஒரு தளத்தன்மை

இங்குச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda_1} = \frac{y-y_1}{\mu_1} = \frac{z-z_1}{\nu_1},$$
$$\frac{x-x_2}{\lambda_2} = \frac{y-y_2}{\mu_2} = \frac{z-z_2}{\nu_2}$$

குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு தளக் கோடுகள் ஆவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்போம் (படம் 72). புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஐ A_1 எனவும், இதன் இடவெக்டரை $\mathbf{a}_1$ எனவும் கொள்வோம். இதேபோல் (x_2, y_2, z_2) ஐ A_2 எனவும், இதன் இடவெக்டரை $\mathbf{a}_2$ எனவும் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$\mathbf{a}_1 = x_1\,\mathbf{j} + y_1\,\mathbf{j} + z_1\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{a}_1 = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + z_2\,\mathbf{k}$$

மேலும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளுக்கு இணையான வெக்டர்களை

$$\mathbf{f}_1 = \lambda_1\,\mathbf{i} + \mu_1\,\mathbf{j} + \nu_1\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{f}_2 = \lambda_2\,\mathbf{i} + \mu_2\,\mathbf{j} + \nu_2\,\mathbf{k}$$

என்று குறிப்போம்.

இப்பொழுது

$$\overline{A_1 A_2},\ \mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2$$

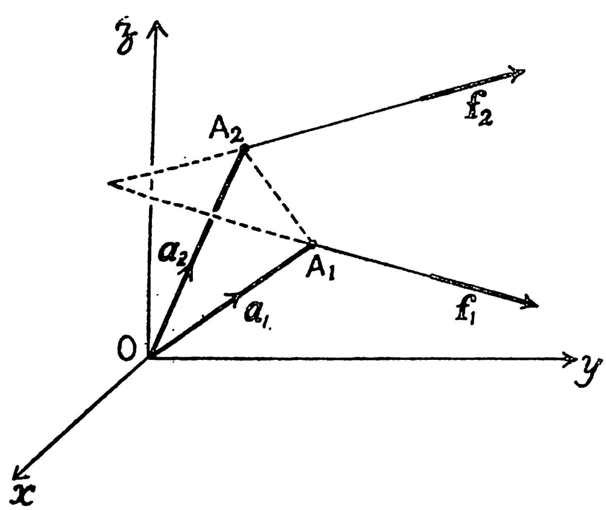
என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தளத்துக்கு இணையானவை. எனவே, இவற்றின் எண்ணி முப்பெருக்கற் பலன் பூச்சியமாகும்.

எனவே, $[\overline{A_1 A_2},\ \mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2] = 0$

ஆனால், $\overline{A_1 A_2} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$

$$= (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$



படம் 72.

ஆகவே,
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது
$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே வேண்டிய நிபந்தனையாகும்.

§ 137. இரு கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மீச்சிறு தூரம்

இப்பொழுது சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\lambda_1}=\frac{y-y_1}{\mu_1}=\frac{z-z_1}{\nu_1}$$

$$\frac{x-x_2}{\lambda_2}=\frac{y-y_2}{\mu_2}=\frac{z-z_2}{\nu_2}$$

குறிக்கும் இரண்டு வெட்டாக் கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மீச்சிறு தூரத்தைக் காண்போம்.

முதலில், சமன்பாடு (135·1) ஐப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் சமன்பாடுகளை

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}_1+t_1\mathbf{f}_1,\quad \mathbf{r}=\mathbf{a}_2+t_2\mathbf{f}_2$$

என்று எழுதலாம்.

இங்கு $\mathbf{a}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$,

$$\mathbf{f}_1=\lambda_1\mathbf{i}+\mu_1\mathbf{j}+\nu_1\mathbf{k},\quad \mathbf{f}_2=\lambda_2\mathbf{i}+\mu_2\mathbf{j}+\nu_2\mathbf{k}$$

கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மீச்சிறு தூரத்தைத் தரும் கோடுகளின் பொதுச் செங்குத்துக்கோடு, இரண்டு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தானது. எனவே. இப் பொதுச் செங்கோடு,

$$\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2$$

என்ற வெக்டருக்கு இணையானதாகும். இவ் வெக்டரின் அலகு வெக்டர்

$$\frac{\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2|}$$

ஆகும். புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஐ A_1 என்றும், புள்ளி (x_2, y_2, z_2)ஐ A_2 என்றும் குறித்தால், பொதுச் செங்கோட்டின் நீளம், அதாவது கோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள மீச்சிறு தூரம்

$$\overline{A_1A_2}\cdot\frac{\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2}{|\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2|}$$

ஆகும். அதாவது

$$\frac{[\overline{A_1A_2},\ \mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2]}{|\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2|}$$

ஆகும்.

ஆனல்,

$$[\,\overline{A_1 A_2},\ \mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2\,] = [\,\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1,\ \mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2\,]$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix},$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} + \mathbf{j}\begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix}.$$

ஆகவே,

$$|\,\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2\,| = \sqrt{\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix}^2}.$$

எனவே, வேண்டிய மீச்சிறு தூரம்,

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \nu_1 & \lambda_1 \\ \nu_2 & \lambda_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix}^2}}$$

கலைச்சொற்கள்

அடைத்த பரப்பு — Closed surface
அணிக்கோவை — Determinant
அதிபரவளைவுரு — Hyperboloid
அதிபரவளைவுப் பரவளைவுரு — Hyperbolic paraboloid
அரை உச்சிக் கோணம் — Semi vertical angle
அலகு வெக்டர் — Unit vector
இசைத் தளம் — Polar plane
இசைப் புள்ளி — Pole
இடவெக்டர் — Position vector
இணை — Parallel
இணைகரத் திண்மம் — Parallelopiped
இணைக் காரணி — Cofactor
இரு தகடு அதிபரவளைவுரு — Hyperboloid of two sheets
உச்சி — Vertex
உருளை — Cylinder
உள் வட்ட மையம் — Incentre
உள் வட்டம் — Incircle
எண்ணி — Scalar
எண்ணிச் சமன்பாடு — Scalar equation
எண்ணி முப்பெருக்கற் பலன் — Scalar triple product
எல்லைப் புள்ளி — Limiting point
ஒரு தகடு அதிபரவளைவுரு — Hyperboloid of one sheet
ஒருதளக் கோடுகள் — Coplanar lines
ஒருதளத் தன்மை — Coplanarity

ஒருபடித்தான	—	Homogeneous
கணம்	—	Set
கன சதுரம்	—	Cube
குத்துக் கோளங்கள்	—	Orthogonal spheres
குத்துத் தொடுதளக் கோளம்	—	Director sphere
குத்து வீழல்	—	Orthogonal projection
குறுக்குப் பெருக்கல்	—	Cross product (vector product)
குறுங்கோணம்	—	Acute angle
கூம்பு	—	Cone
கூம்பு வளைவு	—	Conic
கூம்பு வளைவுரு	—	Conicoid
கூறுகள்	—	Coordinates
கூறுத் தளம்	—	Coordinate plane
கோவை	—	Expression
கோளம்	—	Sphere
சமச்சீரான சமன்பாடுகள்	—	Symmetrical equations
சமச்சீர்	—	Symmetry
சமத் தொடுதளம்	—	Radical plane
சமத் தொடுவச்சு	—	Radical line
சமத் தொடுவச்சு மையம்	—	Radical centre
சார்பற்ற சமன்பாடுகள்	—	Independent equations
செங்குத்துக் கோடு	—	Perpendicular
செங்கோடு	—	Normal
செங்கோட்டு மையம்	—	Orthocentre
செவ்வக அதிபரவளைவு	—	Rectangular hyperbola
செவ்வக இணைகரத் திண்மம்	—	Rectangular parallelopiped
தலையாய அச்சு	—	Principal axis
தலையாய தளம்	—	Principal plane
தளம்	—	Plane
தனிப் பெறுமானம்	—	Absolute value
தன்மை காட்டி	—	Discriminant
திசைக் கொசைன்கள்	—	Direction cosines

திசை விகிதங்கள் — Direction ratios
துணையலகு — Parameter
துணையியத் தளங்கள் — Conjugate planes
துணையியப் புள்ளிகள் — Conjugate points
துணையிய விட்டம் — Conjugate diameter
நாண் — Chord
நான்முகி — Tetrahedron
நீள்வளைவு — Ellipse
நீள்வளைவுப் பரவளைவுரு — Elliptic paraboloid
நீள்வளைவுரு — Ellipsoid
நேர்வட்டக் கூம்பு — Right circular cone
பகுதி — Denominator
பரப்பு — Surface area
பரவளைவு — Parabola
பரவளைவுரு — Paraboloid
பருமன் — Volume
பிம்பம் — Image
பிரதியிட்டு நீக்கு — Replace
பிறப்பி — Generator
பிறப்பிக்கும் வளைவு — Generating curve
பிறழ்ச்சிக் கூம்பு — Reciprocal cone
புள்ளிக் கோளம் — Point sphere
புள்ளிப் பெருக்கல் — Dot product (scalar product)
பெரு வட்டம் — Great circle
பொதுத் தளக் கோளங்களின் தொகுதி — System of coaxal spheres
பொதுத் தளக் கோளங்கள் — Coaxal spheres
மறுதலை — Converse
மிகச் சிறு தூரம் — Shortest distance
மீச்சிறு — Minimum
மீப்பெரு — Maximum
முகம் — Face
மூலை விட்டம் — Diagonal

மையக்கோடு	—	Line of centres
மையக் கோட்டுச் சந்தி	—	Centroid
மைய வகற்சிக் கோணம்	—	Eccentric angle
வரைபரப்பு	—	Ruled surface
வளைவு	—	Curve
விட்டத் தளம்	—	Diametral plane
வீழல்	—	Projection
வெக்டர்	—	Vector
வெட்டு	—	Intersection
வெளி	—	Space